

Prof. Tullio Bucciarelli - Università "La Sapienza" di Roma (Roma - Italy)

- Lezione n. (1) Cosa sono i segnali
- Lezione n. (2) Segnali e sistemi lineari
- Lezione n. (3) Transito dei segnali nei sistemi LP
- Lezione n. (4) Il calcolo della convoluzione
- Lezione n. (5) Lo sviluppo in serie di Fourier
- Lezione n. (6) Serie di Fourier bilatera
- Lezione n. (7) La trasformata di Fourier
- Lezione n. (8) Proprietà della trasformata di Fourier
- Lezione n. (9) Proprietà della trasformata di Fourier (seconda parte)
- Lezione n. (10) Proprietà della trasformata di Fourier (terza parte)
- Lezione n. (11) Alcune trasformate particolari
- Lezione n. (12) Il teorema di Parseval
- Lezione n. (13) Ancora sulla convoluzione
- Lezione n. (14) Applicazioni della trasformata di Fourier
- Lezione n. (15) La banda di un segnale
- Lezione n. (16) Correlazione
- Lezione n. (17) La funzione di trasferimento
- Lezione n. (18) Analisi armonica generalizzata
- Lezione n. (19) Il campionamento
- Lezione n. (20) Il campionamento (parte seconda)
- Lezione n. (21) I segnali modulati
- Lezione n. (22) Modulazione angolare
- Lezione n. (23) Esercitazione sulla trasformata di Fourier
- Lezione n. (24) Esercitazione sulla convoluzione e sulla correlazione

- Lezione 1: Cosa sono i segnali
- Lezione 2: Segnali e sistemi lineari
- Lezione 3: Trattato dei segnali nei sistemi LP
- Lezione 4: Il calcolo della convoluzione
- Lezione 5: Lo sviluppo in serie di Fourier
- Lezione 6: Serie di Fourier bilatera
- Lezione 7: La trasformata di Fourier
- Lezione 8: Proprietà della trasformata di Fourier
- Lezione 9: Proprietà della trasformata di Fourier (seconda parte)
- Lezione 10: Proprietà della trasformata di Fourier (terza parte)
- Lezione 11: Alcune trasformate particolari
- Lezione 12: Il teorema di Parseval
- Lezione 13: Ancora sulle convoluzioni
- Lezione 14: Applicazioni della trasformata di Fourier
- Lezione 15: La banda di un segnale
- Lezione 16: Correlazione
- Lezione 17: La funzione di trasferimento
- Lezione 18: Analisi armonica generalizzata
- Lezione 19: Il campionamento
- Lezione 20: Il campionamento (parte seconda)
- Lezione 21: I segnali modulati
- Lezione 22: Modulazione angolare
- Lezione 23: Estrazione sulla trasformata di Fourier
- Lezione 24: Estrazione sulla convoluzione e sulla correlazione

## LEZ. 1 COSA SONO I SEGNALI

SI PARLA DI SEGNALI QUANDO CI SI OCCUPA DI "TRASMETTERE E ACQUISIRE INFORMAZIONI"

SEGNALE PUO' ESSERE DEFINITO COME IL SUPPORTO FISICO ATTRAVERSO CUI VIENE TRasmESSA O ACQUISITA L'INFORMAZIONE, CON LA SEGUENTE NOTAZIONE GENERICA:

$$S(t)$$

IL SEGNALE NON E' L'INFORMAZIONE, MA LO STRUMENTO ATTRAVERSO IL QUALE L'INFORMAZIONE VIENE GESTITA, TRasmESSA, RACCOLTA.

IL PARAMETRO  $S$  PUO' ESSERE UN QUALSIASI PARAMETRO FISICO (UNA PRESSIONE, UNA INTENSITA' LUMINOSA, UNA TEMPERATURA, ecc.). PUO' VARIARE NEL TEMPO, MA PUO' VARIARE ANCHE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE.

- I PROBLEMI LEGATI ALL'INFORMAZIONE SONO DUE:
- LA TRasmMISSIONE DELL'INFORMAZIONE (TELECOMUNICAZIONI)
  - L'ACQUISIZIONE DELL'INFORMAZIONE (TELE-RICEVIMENTO)

LE CATEGORIE DI SEGNALI OGGETTO  
DI STUDIO SONO DUE: SEGNALI DI ENERGIA  
E SEGNALI DI POTENZA

ENERGIA DI UN SEGNALE  
NELLO INTERVALLO  $T$  :  $E_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt$

POTENZA DI UN SEGNALE  
NELLO INTERVALLO  $T$  :  $P_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt$

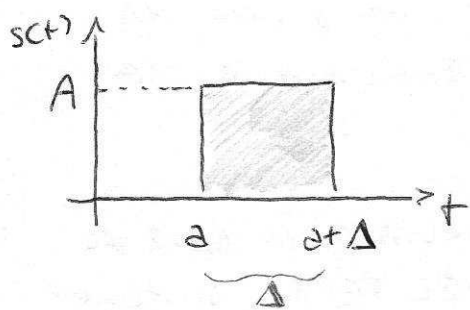
I SEGNALI DI ENERGIA SONO I SEGNALI PER  
I QUALI L'ENERGIA RIMANE FINITA PER  $T \rightarrow \infty$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt$$

I SEGNALI DI POTENZA SONO I SEGNALI PER  
I QUALI LA POTENZA RIMANE FINITA PER  $T \rightarrow \infty$ ,  
MENTRE L'ENERGIA VA A INFINITO

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt$$

SEGNALI DI ENERGIA LIMITATI NEL TEMPO:  
 IL SEGNALE RETTANGOLARE, CHE RAPPRESENTA  
 UN MODELLO APPROSSIMATO DI IMPULSI



$A$  è l'ampiezza dell'impulso rettangolare  
 $\Delta$  è la durata del segnale  
 $a + \frac{\Delta}{2}$  è il punto di applicazione del segnale

$$s(t) = A \text{ rect}_{\Delta} \left( t - a - \frac{\Delta}{2} \right)$$

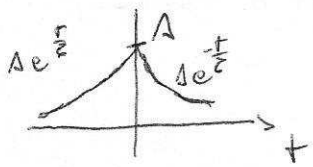
L'energia  $E$  del segnale rettangolare è:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_a^{a+\Delta} A^2 dt = A^2 \Delta$$

SEGNALI DI ENERGIA EVANESCENTI, I SEGNALI  
 ESPONENZIALI:

$$s(t) = A e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$

IL CUI ANDAMENTO È:



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2|t|}{\tau}} dt$$

Per simmetria pari, scrivibile come

$$E = 2 \int_0^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = A^2 \tau$$

IL SEGNALE HA ENERGIA FINITA MA È LIMITATO NEL TEMPO, CIOÈ IL SEGNALE VA A ZERO NEL TEMPO, MA HA ENERGIA FINITA.

SEGNALE DI POTENZA, ad esempio

$$s(t) = A \sin \omega t$$

TALE SEGNALE ESISTE DA  $-\infty$  A  $+\infty$ , HA ENERGIA INFINITA, MA POTENZA FINITA PAR

$$A \quad P = \frac{A^2}{2}$$

I SEGNALI SONO DISTINGUIBILI IN BASE AL LORO COMPORTAMENTO NEL TEMPO: SI HANNO SEGNALI TEMPO-CONTINUI E SEGNALI TEMPO-DISCRETI.

• SEGNALI TEMPO-CONTINUI, DEFINITI PER OGNI ISTANTE DI TEMPO, LE CUI AMPIEZZE SONO CONTINUE (SEGNALI ANALOGICI)

• SEGNALI TEMPO-CONTINUI, LE CUI AMPIEZZE APPARTENONO AD UN INSERTE DISCRETO, AD UN INSERTE NUMERICO DI VALORI. SEGNALI DI DIFFICILE INDIVIDUAZIONE FUNZIONALE.

• SEGNALI TEMPO-DISCRETI, CON AMPIEZZE CONTINUE (SEGNALI CAMPIONATI)

• SEGNALI TEMPO-DISCRETI, CON AMPIEZZE APPARTENENTI AD UN INSERTE DISCRETO (SEGNALI DIGITALI). SONO SEGNALI NOTI SOLO IN CERTI ISTANTI DI TEMPO.

(Grafica in avanti)

## SEGNALI COMPLESSI

$$a(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \stackrel{\text{Formula di Eulero}}{=} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

NELLA RAPPRESENTAZIONE DI ENERGIA E POTENZA SI METTE IL MODULO AL SEGNALE.

ULTIMA E FONDAMENTALE DISTINZIONE  
TRA SEGNALI:

- SEGNALI CERTI, DI CUI È CONOSCIUTO L'ANDAMENTO NEL TEMPO E I PARAMETRI CHE LI CARATTERIZZANO
- SEGNALI ALEATORI, PER I QUALI LA CONOSCENZA FINO A UN CERTO ISTANTE DI TEMPO NON GARANTISCE LA CONOSCENZA AD UN ISTANTE SUCCESSIVO.

## LEZ. 2 - SEGNALI E SISTEMI LINEARI E PERMANENTI

LINEARITA', PERMANENZA, CAUSALITA' E STABILITA' SONO VINCOLI APPLICATI AL PROBLEMA DELLA TRASMISSIONE DI UN SEGNALE, CON LA PRETESA CHE L'INFORMAZIONE SIA RICEVUTA SENZA DEGRADO.

LA LINEARITA' DI UN SISTEMA CONSISTE NEL FATTO CHE L'USCITA DI UN SISTEMA A CUI E' APPLICATO UN INGRESSO E' UNA REPLICA DELL'INGRESSO, CHE POTRA' AVER SUBITO UNA AMPLIFICAZIONE, O UNA ATTENUAZIONE, ED EVENTUALMENTE UN RITARDO, OVIERO DATO L'INGRESSO  $x(t)$ , L'USCITA  $y(t)$  E' DEL TIPO  $y(t) = k \cdot x(t - \tau)$ , IN CUI  $\tau$  E' UN RITARDO E  $k > 0$  E' UNA ATTENUAZIONE SE  $k < 1$  E UNA AMPLIFICAZIONE SE  $k > 1$ .

DEVE AVVENIRE QUESTO IN QUANTO L'INFORMAZIONE STA NELL'ANDAMENTO DEL SEGNALE NEL TEMPO E TALE ANDAMENTO NON PUO' ESSERE MODIFICATO ALTRIMENTI L'INFORMAZIONE VERREBBE PERSA.

LA PERMANENZA DI UN SISTEMA E' LEGATA ALLA INVARIANZA NEL TEMPO DELLE CARATTERISTICHE E DEL FUNZIONAMENTO DEL SISTEMA STESSO; IN SISTEMI AD UN INGRESSO RITARDATO NEL TEMPO CORRISPONDE UNA USCITA RITARDATA:  $x(t) \Rightarrow y(t)$   
e  $x(t - \tau) \Rightarrow y(t - \tau)$



LA CAUSALITA' CONSISTE NEL FATTO CHE LA CAUSA NON PUO' PRECEDERE L'EFFETTO, OVVERO L'USCITA DI UN SISTEMA NON PUO' ESISTERE PRIMA DELL'INGRESSO. LA STABILITA' CONSISTE NEL FATTO CHE AD UN INGRESSO QUALSIASI, PURCHE' LIMITATO IN AMPIEZZA, CORRISPONDA UNA USCITA ANCIT'ESIA LIMITATA IN AMPIEZZA.

I SISTEMI LINEARI SONO TALI PER CUI VALGONO I PRINCIPI DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI, DA SOVRAPPORZIONE DEL SEGNALE DI INGRESSO  $x(t)$  IN UNA SOMMA DI TANTI SEGNALE ELEMENTARI  $x_n(t)$ ;

$$x(t) = \sum_n a_n x_n(t) \Rightarrow y(t) = \sum_n a_n y_n(t)$$

SONO OPERAZIONI LINEARI LA DERIVAZIONE, L'INTEGRAZIONE, LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

E' UTILE DEFINIRE ALCUNI SEGNALE ELEMENTARI: L'IMPULSO DI DIRAC, IL GRADINO UNITARIO E LA FUNZIONE SEGNO.

IMPULSO DI DIRAC  $f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(t)$

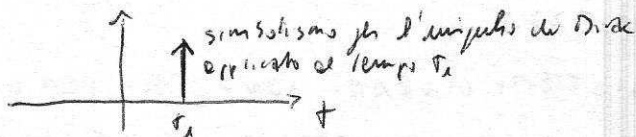
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

LA PROPRIETA' APPROPRIATA DELL'IMPULSO DI DIRAC:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0) \delta(t-t_0) dt =$$

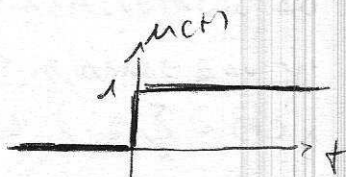
$$= s(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = s(t_0)$$

IN SOSTANZA L'IMPULSO DI DIRAC HA LETTO IL VALORE DELLA FUNZIONE  $s(t)$  NEL PUNTO  $t_0$ , DOVE L'IMPULSO E' APPLICATO.



IL GRADIVO UNITARIO

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

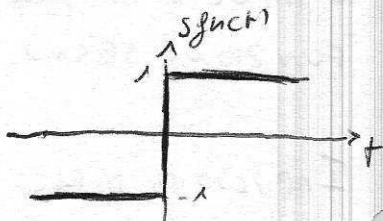


E' UN SEGNALE CHE INDICHA SU ISTANTI DI TEMPO POSITIVI, NOTARE CHE

$$\frac{d}{dt} u(t) = f(t), \text{ OUNERO L'IMPULSO DI DIRAC E' LA DERIVATA DEL GRADIVO}$$

LA FUNZIONE SEGNO

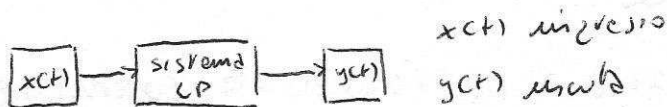
$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$



NOTARE CHE L'ONDA TRIANGOLARE PUO' ESSERE ESPRESSA CONE L'INTEGRALE DEL SEGNO QUANDO

$$\int \text{sgn}(\text{sin}(t)) dt$$

### LEZ. 3 - TRANSITO DEI SEGNALI IN SISTEMI LINEARI E PERMANENTI



IL SISTEMA È CARATTERIZZATO DALLA RISPOSTA IMPULSIVA  $h(t)$   
L'USCITA È CALCOLATA CON LA CONVOLUZIONE TRA L'INGRESSO  
E LA RISPOSTA IMPULSIVA

RISPOSTA IMPULSIVA, FUNZIONE  $h(t)$ , È DEFINITA,  
CON IL SEGNALE  $x(t)$  DECOMPOSTO CONE SOMMA DI  
IMPULSI DI DIRAC, CON LA RISPOSTA AL SINGOLO  
IMPULSO DI DIRAC.

L'ANDAMENTO DI  $h(t)$  RAPPRESENTA LA GRANDezza  
IN USCITA OSSERVATA DOPO UN TEMPO  $t$  DA QUANDO È  
APPLICATO UN IMPULSO DI DIRAC; IL SEGNALE DI  
INGRESSO VIENE SVILUPPATO NELLA SOMMA DI INFINITI  
IMPULSI DI DIRAC, TRASLATI L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO,  
LA CUI APPREZZA È  $x(t) \delta$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \text{rect}_{\Delta} \left( t - \frac{1}{\Delta} = f(t) \right)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = h(t)$$

USCITA  $y(t)$  DEL SISTEMA, È L'INTEGRALE

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

DETTO INTEGRALE DI CONVOLUZIONE, FORMALMENTE  
ESPRESSO COME

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

TALE RELAZIONE VALE QUALUNQUE SIA LA  
NATURA DEL SEGNALE DI INGRESSO, SIA FINO DI  
ENERGIA O DI POTENZA, ANALOGICO O DIGITALE.

DALLE CONSIDERAZIONI FATTE SUSSISTONO DUE TIPI  
DI PROBLEMI, UNO DI ANALISI E UNO DI SINTESI.

IL PROBLEMA DI ANALISI CONSISTE NEL CERCARE  
(CANALITICAMENTE) L'USCITA, DATI L'INGRESSO E  
LA RISPOSTA IMPULSIVA.

IL PROBLEMA DI SINTESI CONSISTE NEL PROGETTARE  
UNA OPPORTUNA RISPOSTA IMPULSIVA, OVVERO UN  
SISTEMA LINEARE PERMANENTE, DATI L'INGRESSO  
E L'USCITA.

LA RISPOSTA INDICIALE, È DEFINITA COME LA CONVOLUZIONE TRA LA RISPOSTA IMPULSIVA E IL GRADIVO UNITARIO. L'IMPORTANZA RISIENDE NEL FATTO CHE LA SUA DERIVATA È LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA.

$$y_i(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

↓  
indivisa

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = h(t)$$

ANALISI DI VARI TIPI DI (INGRESSI)

DATO IL SISTEMA  $\boxed{x(t)} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{y(t)}$

INGRESSO ESPONENZIALE COMPLESSO

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$$

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

L'USCITA È L'INGRESSO MODIFICATO IN AMPLIEZZA E FASE ATTRAVERSO LA RELAZIONE  $H(f_0)$ .

## INGRESSO SEGNALE SINUSOIDALE

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$y(t) = A \sqrt{[c^2(f_0) + s^2(f_0)]} \cos(2\pi f_0 t - \phi_0)$$

con  $\phi_0 = \arctan \frac{s(f_0)}{c(f_0)}$

$$c(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau$$

$$s(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau$$

L'USCITA DI UN SISTEMA LINEARE CARATTERIZZATO DA UNA RISPOSTA IMPULSIVA  $h(t)$ , QUANDO L'INGRESSO È UN SEGNALE SINUSOIDALE A FREQUENZA  $f_0$ , È ANCORA UNA SINUSOIDE CON AMPLIEZZA E FASE MODIFICATE, E CON STESSA FREQUENZA  $f_0$ .

# LEZ. 4 - IL CALCOLO DELLA CONVOLUZIONE

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

SCRITTO CONVENZIONALMENTE

LA CONVOLUZIONE  
È IL PRODOTTO  
DI UNA FUNZIONE  
PER UN'ALTRA FUN-  
ZIONE TRASLATA

$$e(t) = x(t) * u(t)$$

CONVOLUZIONE CON IMPULSI DI DIRAC (CREAMENTO UNITARIO)

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{traslazione di } x(t),$$

e dx, di un tempo

$$x(t) * \int(t) = x(t) \Rightarrow \int(t) e^{-t} \text{ è l'elemento unitario}$$

rispetto all'operazione di  
convoluzione, il prodotto di  
convoluzione

CONVOLUZIONE CON UN GRADINO  $\Rightarrow$  UN INTEGRALE

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

CONVOLUZIONE CON SEGNALI SINUSOIDALI  $\Rightarrow$  moltiplica  
di semplice

$$e(t) = x(t) * \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(t) = C(f_0) \cos(2\pi f_0 t) + S(f_0) \sin(2\pi f_0 t)$$

e fase,  
stessa  
freq.

e, in coordinate polari

$$e(t) = M(f_0) \cos(2\pi f_0 t - \phi(f_0))$$

SI NOTI CHE IL COEF. DEL RISULTATO HA LA STESSA  
FREQUENZA DEL COEF. DI INTERESSE, CON  
AMPLIEZZA MODIFICATA DA UN FATTORE  $A \cdot \pi(\rho_0)$ ,  
E FASE NON NULLA.

AMPLIEZZA E FASE SONO DIVENTATE FUNZIONI DELLA  
FREQUENZA  $\rho_0$  CONSIDERATA.

STEP DI CALCOLO DELLA CONVOLUZIONE nel dominio  
del tempo

1. INVERSIONE DELL'ASSE DI UNO DEI DUE SEGNALI,  
si passa da  $t$  a  $-t \Rightarrow$  ribaltamento rispetto  
all'ora delle ordinate

2. TRASLAZIONE DEL SEGNALE IL CUI ASSE È STATO  
INVERTITO; LA TRASLAZIONE È NEGATIVA SE VERSO  
SINISTRA ED È POSITIVA SE VERSO DESTRA;  
SI PASSA CIOÈ DA  $t$  A  $t - \tau$

3. SI CALCOLA IL PRODOTTO TRA I DUE SEGNALI

4. SI CALCOLA L'AREA DEL PRODOTTO.

L'AREA DEL PRODOTTO È IL RISULTATO DELLA  
CONVOLUZIONE, IN FUNZIONE DEL TEMPO, O  
INTERVALLO DI TEMPO, DELLA TRASLAZIONE  
(vd. esempi sugli attach)



## LEZ. 5 - LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

come strumento descrittivo dei segnali.

SI SUPPONE SEGNALI CIRCATI IN TEMPO AD UN INTERVALLO DI DURATA  $T$  E CENTRATO IN  $0$   $[-T/2, T/2]$ .

LA BASE DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER, CHE

DECOMpone IL SEGNALE  $x(t)$  NELLA SOMMA DI COSINUSI E DI SINUSI CON FREQUENZE PARI A  $k/T$  È:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t / T) + b_k \sin(2\pi k t / T)$$

LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER È VALIDO PER I SEGNALI CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI DI DIRICHLET, SEGNALI CON CUI SI HA A CHE FARE NELLE APPLICAZIONI. TALI CONDIZIONI SONO:

• L'INTEGRALE  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt$  ESISTE ED È FINITO

• IL NUMERO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE DELLE FUNZIONI NELL'INTERVALLO  $[-T/2, T/2]$  DEVE ESSERE FINITO

• IL NUMERO DEI MASSIMI E DEI MINIMI NELL'INTERVALLO DEVE ESSERE FINITO.

SE SONO SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI DIRICHLE  
NELLO INTERVALLO  $[-T/2, T/2]$  ALLORA LO  
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER CONVERGE:

1. A  $x(t)$ , OVVERO AL SEGNALE, NEI PUNTI DI CONTINUITA'
2. A  $\frac{x(t+) + x(t-)}{2}$  NEI PUNTI DI DISCONTINUITA', OVVERO  
CONVERGE ALLA MEDIA TRA IL LIMITE  
DESTRO E SINISTRO DEI DUE PUNTI
3. ALL'ESTERNO DELL'INTERVALLO  $[-T/2, T/2]$  LO SVILUPPO  
PERIODICITA  $x(t)$ .

I COEFFICIENTI  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$ , SFRUTTANDO L'ORTOGONALITA'  
PM SEGNALE, VENGONO CALCOLATI COSI:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad \text{E' LA MEDIA DEL SEGNALE  
NELLO INTERVALLO}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \underbrace{\cos(2\pi k t / T)}_{\text{prodotto scalare}} dt \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \underbrace{\sin(2\pi k t / T)}_{\text{prodotto scalare}} dt \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, \infty$$

non c'è il segno  $\pm$  l'inverso della norma del segnale

## ORTOGONALITA'

DUE SEGNALE SONO ORTOGONALI SE IL LORO PRODOTTO  
SCALARE E' NULLO

# PRODOTTO SCALARE

È DEFINITO PER TRE CASI DI SEGNALE:

1. DI ENERGIA
2. DI POTENZA
3. PERIODICI O LIMITATI A UN INTERVALLO  $T$

1. PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALE DI ENERGIA

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt \quad \text{è una quantità finita}$$

2. PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALE DI POTENZA

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-A/2}^{A/2} x^*(t) y(t) dt$$

3. PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALE PERIODICI O LIMITATI ALL'INTERVALLO  $T$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t) dt$$

SE  $x(t)$  E  $y(t)$  SONO LO STESSO SEGNALE, NEL CASO 1 IL PRODOTTO SCALARE COINCIDE CON L'ENERGIA DEL SEGNALE, NEL CASO 2 E 3 CON LA POTENZA

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

$$2. \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-A/2}^{A/2} x^*(t) x(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-A/2}^{A/2} |x(t)|^2 dt = P_x$$

$$3. \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = P_x$$

# SPETTRO DI AMPIEZZA E SPETTRO DI FASE

◉ Data l'espressione dello sviluppo in serie di Fourier del segnale  $x(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t / T) + b_k \sin(2\pi k t / T)$$

sappiamo che i coefficienti  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  contengono

◉ l'informazione del segnale  $x(t)$ .

Manipolando opportunamente l'espressione sopra otteniamo l'espressione

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(2\pi k t / T - \phi_k)$$

in cui  $M_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$ .

La sommatoria sono coseni di ampiezza  $M_k$  e fase  $\phi_k$ .

Nella nuova relazione l'informazione del segnale  $x(t)$  è localizzata in  $a_0$ , in  $M_k$  e in  $\phi_k$ .

$a_0$  è la componente continua del segnale  $\rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$

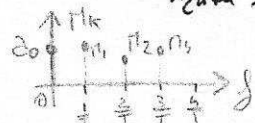
$\frac{1}{T}$  è la freq. fondamentale

$\frac{2}{T}$  è la seconda armonica,  $\frac{3}{T}$  la terza, ecc.

$M_k$  è lo spettro di ampiezza modulata

$\phi_k$  è lo spettro di fase

$T \cdot a_0 = \text{area del segnale } x(t)$



per  $n \rightarrow \infty$   
19  $\phi_k \rightarrow 0$



PROBLEMA 10 - DIVERGENZA E ROTAZIONE DI CAMPI VETTORIALI

Calcolare la divergenza e la rotazione del campo vettoriale  $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y, yz^2, x^2z)$  nel punto  $P(1,1,1)$ .

La divergenza di un campo vettoriale  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  è definita come  $\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ .  
La rotazione di un campo vettoriale  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  è definita come  $\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$ .

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z)$$

$$= 2xy + z^2 + x^2$$

Calcolando nel punto  $P(1,1,1)$  si ottiene  $\text{div} \vec{F}(1,1,1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 + 1^2 = 4$ .

La rotazione del campo  $\vec{F}$  è data da  $\text{rot} \vec{F} = (\frac{\partial}{\partial y}(x^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(yz^2), \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2z), \frac{\partial}{\partial x}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y))$ .

$$= (x^2 - yz, 2xy - 2xz, z^2 - x^2)$$

Calcolando nel punto  $P(1,1,1)$  si ottiene  $\text{rot} \vec{F}(1,1,1) = (1 - 1, 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1, 1^2 - 1^2) = (0, 0, 0)$ .

# LEZ. 6 - SERIE DI FOURIER BILATERA e TEOREMA DI PARIVALE

NELLO SVILUPPO IN SERIE BILATERA GLI INDICI SI  
ESTENDONO DA  $-\infty$  A  $+\infty$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k t / T}$$

~~CON~~

$$x_k = c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$$

per  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

SPETTRO DI AMPLIEZZA BILATERO

$$|c_k| = \frac{\sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}}{2}$$

SPETTRO DI FASE BILATERO

$$\phi_k = -\arg(c_k) = \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

THEORY OF FINANCIAL  
INVESTMENT

Let  $X$  be a random variable with mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$ . Then the variance of  $aX + b$  is  $a^2\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \mu + \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)$$

$$E\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = n\mu$$

$$E\left[\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right] = 0$$

Let  $Y = \sum_{k=1}^n X_k$

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \mu + \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)$$

$$E[Y] = n\mu$$



# IL TEOREMA DI PARSEVAL

L.L.G.P. 2.1

NEL CONTESTO DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER BILATERA, IL TEOREMA DI PARSEVAL AFFERMA CHE,

PER SEGNALI PERIODICI, O PER SEGNALI LIMITATI NEL TEMPO, IL PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALI È UGUALE ALLA SOMMA DEI COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO DEL SEGNALE COMPLESSO PER I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO DELL'ALTRO SEGNALE, CON GLI INDICI DEI COEFFICIENTI UGUALI, OVVERO

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot y(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* \cdot y_k$$

Prodotto scalare tra  $x(t)$  e  $y(t)$

## Dimostrazione

Si sviluppano i due segnali secondo la serie di Fourier bilaterale, poi si considera il prodotto di un segnale per applicare la definizione di prodotto scalare tra segnali di energia.

L'espressione che si trova è un integrale con due sommatorie; si può scambiare l'ordine, ottenendo due sommatorie e un integrale.

Applicando l'ortogonalità si arriva al risultato finale. Inoltre si considera il caso particolare in cui

se due segnali sono uguali, arrivando alla espressione della potenza del segnale. In sostanza abbiamo che il prodotto scalare tra due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  è definito come

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) y(t) dt \quad \text{definizione di prodotto scalare tra due segnali}$$

I due segnali sono sviluppabili secondo Fourier e gli sviluppi sono

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad y(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_h e^{j2\pi h \frac{t}{T}}$$

Di nuovo, sostituendo sopra, otteniamo

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} \cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_h e^{j2\pi h \frac{t}{T}} dt$$

Possiamo scambiare le somme con l'integrale e av

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_k^* y_h \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi(h-k) \frac{t}{T}} dt$$

Per l'ortogonalità, l'integrale è nullo quando  $h \neq k$  ed è pari a 1 quando  $h = k$ . Da questo deduciamo il Teorema di Parseval, per segnali periodici o segnali limitati nel tempo

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) y(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* y_k \quad \text{e} \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2$$

# TEOREMA DI PARSEVAL nel contesto dello sviluppo in serie di Fourier bilaterale

Il prodotto scalare di due segnali è uguale alla somma dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale con i coefficienti dello sviluppo dell'altro, in cui gli indici sono diventati uguali

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* y_k$$

Quando i due segnali sono uguali

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2$$

potenza del segnale

il che equivale a una rappresentazione della potenza del segnale.

## ERRORE DI APPROSSIMAZIONE

APPROSSIMARE LO SVILUPPO SIGNIFICA TRONCARE LA SERIE A UN NUMERO FINITO ( $N$ ) DI ARMONICHE, MA NEL FARE QUESTO SI COMMETTE UN ERRORE DATO DALLA SOMMA DEI COEFFICIENTI SCARTATI. L'ESPRESSIONE DELL'ERRORE HA QUALCUNA LIMITAZIONE E PER TALE RAGIONE VIENE INTRODOTTO IL CONCETTO DI COMPLETEZZA DELLO SVILUPPO, PER AVERE UNO STRUMENTO CHE DICA QUANTE ARMONICHE POSSO METTERE ED AVERE UN ERRORE TANTO PICCOLO CHE POSSO ACCETTARE L'APPROSSIMAZIONE.

## COMPLETEZZA

CIOE' QUANDO UN SISTEMA O UNO SVILUPPO E' COMPLETO RISPETTO AD UNA CERTA CATEGORIA DI SEGNALE

PER DEFINIZIONE, L'IDEA DI COMPLETEZZA E':

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt = 0$$

CHE PORTA, PER SUCCESSIVI SVILUPPI, ALLA RELAZIONE

$$P_x - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = 0$$

LA POTENZA DELL'ORIGINE E' LA POTENZA DELLE

ARMONICHE TRASCURATE:

$$\frac{1}{T} \|e\|^2 = \sum_{|k| > N} |x_k|^2, \text{ CHE DIPENDE DALL'AMPIEZZA DEL SEGNALE, CHE È UN INCONVENIENTE.}$$

POICCHÉ LA RELAZIONE SOPRA DIPENDE DALL'AMPIEZZA DEL SEGNALE VIENE INTRODOTTI L'ERRORE PERCENTUALE, NORMALIZZANDO LA POTENZA DELL'ERRORE ALLA POTENZA DEL SEGNALE, SI DIRÀ CHE L'ERRORE RELATIVO È UNA PERCENTUALE DELLA POTENZA DEL SEGNALE

$$\epsilon_r = 1 - \frac{1}{P_x} \sum_{k=-N}^N |x_k|^2$$

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
5301 SOUTH CAMPUS DRIVE  
CHICAGO, ILLINOIS 60637

ANIONIC POLYMERIZATION  
of styrene  
with

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 191$$

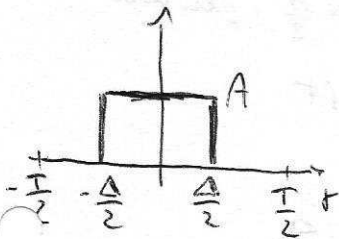
TO OBTAIN AN ANIONIC POLYMERIZATION  
OF STYRENE WITH ANIONIC INITIATORS  
A POLYMERIZATION OF STYRENE WITH ANIONIC  
INITIATORS IS DESCRIBED IN THIS PAPER.  
THE POLYMERIZATION OF STYRENE WITH ANIONIC  
INITIATORS IS DESCRIBED IN THIS PAPER.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 191$$

Sviluppo in serie di Fourier  
del segnale  $x(t) = A \text{rect}_{\Delta}(t)$

$$x(t) = A \text{rect}_{\Delta}(t)$$

L'impulso rettangolare ha ampiezza  $A$ , durata  $\Delta$ .



PER APPLICARE LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER, BASTA È INSERIRLO ALL'INTERNO DI UN INTERVALLO DI CURENTA  $T$ .

Per definizione della serie di F.:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k t / T}$$

a coefficienti  $x_k$

Si tratta dunque, in sostanza, di determinare i

coefficienti  $\rightarrow x_k = \frac{2k - 1}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$

L'integrale si estende all'intervallo

$[-\Delta/2, \Delta/2]$ , in quanto altrove è nullo, quindi  $x(t)$  nell'intervallo sopracitato  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ ,

$$x_k = \frac{A}{T} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-j2\pi k t / T} dt$$

Per calcolare questo integrale ci si avvale della formula di Eulero e del fatto che l'intervallo è pari e che il coseno è funzione pari e che il seno è funzione dispari.

Quindi

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$\Rightarrow e^{-jx} = \cos(-x) + j \sin(-x) =$$

$$= \cos x - j \sin x$$

(in quanto coseno è  
funzione pari, e seno è  
funzione dispari)

Dunque  $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ , per cui

$$c_k = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(2\pi kt/T) - j \sin(2\pi kt/T) dt$$

2 volte nell'intervallo da 0 a  $\frac{\Delta}{2}$ , e una  
0 nell'intervallo

$$c_k = \frac{2A}{T} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \cos(2\pi kt/T) dt$$

più facilmente risolvibile:

$$c_k = \frac{2A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi k} \sin(2\pi k T/T) \Big|_0^{\frac{\Delta}{2}} =$$

$$= \frac{2A}{\pi k} \sin(2\pi k \frac{\Delta}{2} / T)$$

Poiché la funzione seno cardinali,  $\text{sinc}(x)$  è definita come

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

per  $x=0$ , ha valore  $\pi$ .  
differenza

$$c_k = \frac{A}{\pi k} \cdot \frac{\Delta/T}{\Delta/T} \cdot \sin(\pi k \Delta/T) =$$

"sinc( $\pi k \Delta/T$ )"

$$= \frac{A \cdot \Delta}{T} \text{sinc}(\pi k \Delta/T)$$

Dunque

$$X(f) = A \text{rect}_{\Delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{A \cdot \Delta}{T} \text{sinc}(\pi k \Delta/T)}_{X_k \text{ nell' } \dots} \cdot e^{j2\pi k T f}$$



Lezione n. 7

LA TRASFORMATA DI FOURIER

Prof. Tullio Bucciarelli  
40'24"

- La Trasformata di Fourier

Il segnale  $x(t)$  è dato dalla somma di infinite sinusoidi, con un coefficiente  $e^{j\omega t}$ , come mostrato a lato.

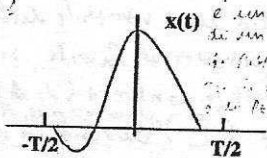
Sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt/T} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

per  $k = -\infty \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \infty$

Dobbiamo dare una interpretazione all'espressione dello sviluppo in serie di Fourier per consentire, attraverso un'operazione formale di passaggio al limite, di arrivare all'idea di  $T \rightarrow \infty$  che è più generale di quella che andremo a sviluppare.

nd vista



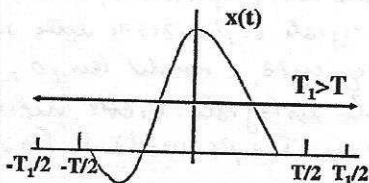
è un segnale periodico di periodo  $T$  (un intervallo) e la funzione  $x(t)$  è un segnale periodico di periodo  $T$ . La funzione  $x(t)$  è un segnale periodico di periodo  $T$ .

$$\frac{1}{T} = \Delta f$$

tra frequenze

Sostituiamo  $\frac{1}{T}$ , che è la distanza tra le varie dello spettro di ampiezza e dello spettro di fase con  $\Delta f$ , la distanza tra frequenze, otteniamo la nuova espressione, a lato, dello sviluppo in serie di Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \Delta f t} \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k \Delta f t} dt$$



$$x_1(t) = x(t) \quad \text{per } |t| < T/2$$

$$x_1(t) = 0 \quad \text{per } T/2 < |t| < T_1/2$$

Si esegua l'operazione formale di estendere il intervallo di osservazione del segnale. Si introduce un nuovo segnale,  $x_1(t)$ , identico a  $x(t)$  nell'intervallo iniziale, pari a zero nella parte aggiunta dell'intervallo. Si può riscrivere lo sviluppo in funzione del nuovo intervallo.

La serie convergerà a zero nella parte estesa dell'intervallo, mentre convergerà al segnale  $x(t)$  nell'intervallo  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$ . Nella zona di continuità la convergenza non cambia.

TRANSFORMATA DI FOURIER

Il nuovo intervallo di frequenza diventa più piccolo, in quanto  $T_1 > T$ .

$$\frac{1}{T_1} = \Delta f_1 < \Delta f$$

Quindi le righe dello sviluppo di Fourier si addensano, con la distanza tra le righe che diventa più piccola.

L'intervallo di conoscenza, al limite, va all'infinito, rimanendo quello bond la definizione iniziale del segnale. Nell'estensione il valore è nullo.

Quando  $T$  tende all'infinito il  $\Delta f$  tende a un differenziale,  $\frac{1}{T}$  tende a 0; la quantità  $k \Delta f$ , per valori di  $\Delta f$  finiti, assume un insieme discreto di valori, ma esso tende a  $f$  quando "le righe" si infittiscono, ovvero tende alla continuità della variabile. Da una variabile discreta, con una operazione al limite, si passa a una variabile continua (da  $\Delta f$  a  $f$ ). La somma ( $\sum$ ) diventa un integrale, da  $-\infty$  a  $+\infty$ . In questa operazione al limite l'espressione dello sviluppo in serie si trasforma, come riportato.

Nella nuova espressione, il secondo integrale è funzione della sola frequenza, e non del tempo, e tale integrale viene definito come Trasformata di Fourier.

Se vogliamo, attraverso questa operazione al limite, si ha un passaggio dai coefficienti di Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \Delta f_1 t} \Delta f_1 \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k \Delta f_1 t} dt$$

L'estensione dell'intervallo all'infinito permette una analisi di quella che avviene alla formula sopra citata.

Si opera un "limite dello sviluppo in serie per T che tende all'infinito"

salto  
suscettivo  
di frequenza

$$\Delta f \rightarrow df$$

$$k \Delta f \rightarrow f$$

$$\sum \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

La nuova espressione dello sviluppo in serie è quello dello spettro al limite. Nel secondo integrale, un  $\Delta t$ , si assiste al fatto che perdendo la dipendenza dal tempo e di avere dipendenza solo frequenza. Quanto secondo integrale definisce la

Trasformata di Fourier  $\Rightarrow$  dominio  
semplice  
frequenza

Si passa dal dominio del tempo al dominio della frequenza

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Antitrasformata di Fourier

Si passa dal dominio della frequenza al dominio del tempo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$X(f)$  è in generale complessa anche se  $x(t)$  è reale

wellimenti di Fourier, che rappresentano l'ampiezza delle sinusoidi costanti, il segnale, ad una espressione che in altre parole  $\Delta f$  rappresenta l'ampiezza infinitesimale delle infinite sinusoidi che vanno a costituire il segnale. Non si ha più una infinita successione, con la frequenza con  $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots$

Abbiamo ancora una infinità di sinusoidi, ma non numerabili. Le ampiezze infinitesimali delle sinusoidi sommate, rendono il segnale. Tutto questo come conseguenza dell'estensione dell'intervallo. Nella regione considerata, sia la serie, che la T. di F., uno lo stesso significato e rappresentano il segnale  $x(t)$ , ed di questo lo sviluppo e pensavano nelle serie e identicamente nelle nelle Trasformate.

## Segnali impulsivi

Esistenza della trasformata di Fourier → sommabilità di  $x(t)$  sull'intero asse tempi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

$x(t)$  è un segnale impulsivo

Sotto la condizione di Dirichlet, le stesse per lo sviluppo in serie, siamo garantiti della somma sotto dell'intergrale che stiamo trasformando di Fourier. Nello sviluppo e garantita la convergenza.

Se sussiste la condizione di esistenza della Trasformata di Fourier, allora, allora  $x(t)$  è un segnale di tipo impulsivo, un segnale sul impulso.

vd. nota è per caso al prossimo argomento.

## Segnali di energia

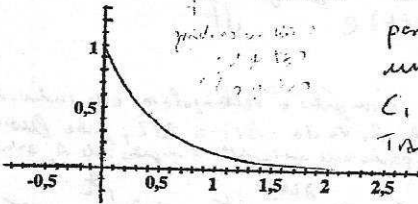
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Se il segnale è impulsivo

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \int_{-B}^B X(f) e^{j2\pi ft} df|^2 dt = 0$$

Esempio 1. Si tratta di un segnale che non è limitato nel tempo, definito come impulso esponenziale. È 1 e zero per tempi negativi, per tempi positivi ha un andamento esponenziale decrescente. Ci richiama a questo segnale e mettiamo la Trasformata di Fourier.

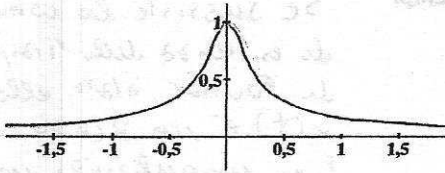
$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \text{con } \alpha > 0$$



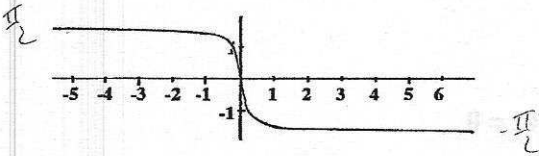
Il modulo coincide con quello del segnale. Vd. nota 4

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

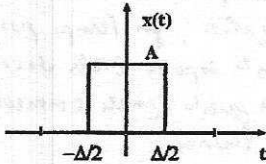


$$\Phi(f) = -\text{tg}^{-1}(2\pi f/\alpha)$$



Esempio 8. Un impulso rettangolare di ampiezza  $A$ , centrato in  $0$ , durata  $\Delta$

$$x(t) = A \text{rect}_{\Delta}(t)$$



La trasformata di Fourier si calcola come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Si come l'impulso è rettangolare, esso individua un intervallo che va da  $-\Delta/2$  a  $\Delta/2$ , più vicino e molto, quindi, poiché nell'intervallo l'impulso vale  $A$ , abbiamo

$$\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} A \cdot e^{-j2\pi ft} dt = 2A \int_0^{\Delta/2} \cos 2\pi ft dt =$$

$$X(f) = A\Delta \frac{\sin(\pi f\Delta)}{\pi f\Delta} = A\Delta \text{sinc}(\pi f\Delta)$$

$$= \frac{1}{2\pi f} \cdot 2A \cdot \text{sen}(2\pi f t) \Big|_0^{\Delta/2} = \frac{1}{2\pi f} \cdot 2A \cdot \text{sen}(2\pi f \frac{\Delta}{2}) = \frac{1}{2\pi f} 2A \cdot \text{sen}(\pi f \Delta) =$$

per la formula di Eulero

La Trasformata di Fourier - 4/8 - Lezione 7

per la formula di Eulero

per la formula di Eulero, che integra su un intervallo pari a  $\Delta$

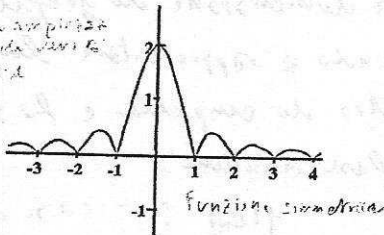
può essere  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
 per  $\Delta \rightarrow 0$   
 si ha il  
 valore  
 della  
 funzione  
 in  $\Delta$

$$= \frac{1}{\pi f} A \sin(\pi f \Delta) = \frac{\Delta}{\Delta} \cdot \frac{1}{\pi f} \cdot A \sin(\pi f \Delta) = A \Delta \operatorname{sinc}(\pi f \Delta)$$

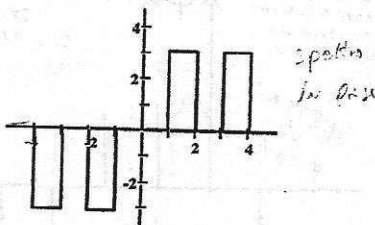
Il modulo dell'espressione è:

$$|X(f)| = \left| A \Delta \frac{\sin(\pi f \Delta)}{\pi f \Delta} \right|$$

Spettro di amplitudine  
a  $\omega = 2\pi f$  da  $\Delta$  a  $2\Delta$   
di  $\omega = \pi f \Delta$



$$\Phi_x(f) = \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn}(\sin(\pi f \Delta))) \operatorname{sgn}(f)$$



Gli impulsi per  $\Delta$  e  $2\Delta$  sono legati in un modo  
e lo stesso per  $\Delta$  e  $2\Delta$  e  $3\Delta$  e  $4\Delta$  e così via  
La relazione tra  $\Delta$  e  $2\Delta$  è  $\Delta = 2\Delta$  e così via  
questo significa che  $\Delta = 2\Delta$

Si assume una fase nulla o  
un valore reale e positivo



Si assume una fase pari a  $\pi/2$   
o un valore reale e negativo  
ma  $\Delta = -\pi$



Fine Let.

$$x(t) = \delta(t)$$

## Trasformata dell'impulso di Dirac

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

Questa è l'importante componente dell'impulso di  
Dirac nel dominio del tempo e l'unità, la costante,  
nel dominio della frequenza. Questo vuol dire che un'impulso  
di Dirac è presente tutte le frequenze, con lo stesso peso.

Siccome una delle proprietà dell'impulso di Dirac è quello di leggere il valore della

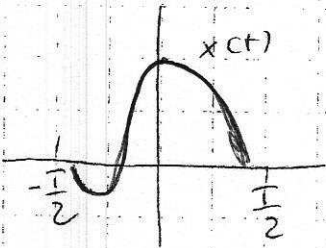
funzione nel punto 0 (per questo si dice che è un'impulso di Dirac),

l'espressione per la trasformata di Fourier è la seguente:

quindi l'impulso di Dirac non ha alcuna selezione in frequenza.

nota 1:

# INTERPRETAZIONE dello Sviluppo in serie di Fourier



$x(t)$  è un segnale conosciuto all'interno di un intervallo;  $\frac{1}{T}$  ha dimensione di frequenza.

Andando a rappresentare lo spettro di ampiezza e lo spettro di fase assieme:

$$\frac{1}{T} = \Delta f$$

$E_0$  è la componente continua del segnale, componente della frequenza 0.

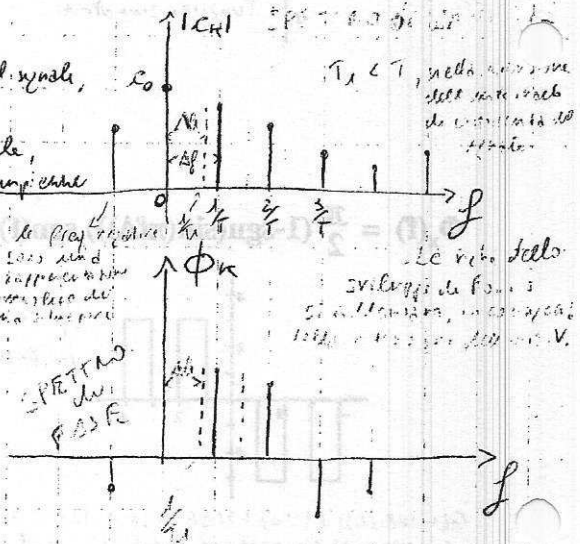
$\frac{1}{T}$  è la frequenza fondamentale, alla quale corrisponde un periodo e una fase.

È facile vedere che  $\frac{1}{T}$  è la distanza tra le righe dello spettro, dunque possiamo sostituirlo con  $\Delta f$ , che è la distanza tra le frequenze.

Così facendo la formula dello sviluppo in serie di Fourier diventa

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \Delta f t} \Delta f \int_{-1/2}^{1/2} x(t) e^{-j2\pi k \Delta f t} dt$$

nota 1.1:



nota 2

## TRASFORMATA di FOURIER

È nel dominio della frequenza -

Il senso dello T. di F. è quello di capire qualcosa in frequenza, che non è possibile capire nel tempo -

Ci chiediamo quando tale rappresentazione converge, in quanto, parlando dello sviluppo in serie di Fourier, ci siamo dovuti porre il problema di "che senso aveva" l'uguaglianza che scrivevamo e quindi dove convergessero le serie -

(13:30)

L'esistenza dello Trasformato è garantita dalle stesse condizioni di Dirichlet considerate per lo sviluppo in serie di Fourier.

Si sono garantiti dell'esistenza dello T. di F. se lo  $x(t)$  è sommabile sull'intero asse del tempo. Si ricorda che se la serie, era sommabile sull'intervallo -

nota 2. Fine



nota 3

da 15'00"

Nello sviluppo in serie, dell'analisi lo condizione di sommabilità (condizione di Dirichlet), non era garantita l'individuazione di un numero di coefficienti che commettono un certo tipo di errore controllabile e a tale scopo era stato introdotto il concetto di completezza e si andava a considerare lo potenza dell'errore; nel caso della trasformata di Fourier si ha una considerazione analoga.

Considerando l'espressione  $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B x(t) dt - \int_{-B}^B X(f) e^{j2\pi f t} df$

con la serie si limitava la parte da  $-N$  e  $N$  e si individuava un certo intervallo di frequenza. Però, questo non è applicabile nel caso della trasformata, poiché non possiamo pensare di individuare un numero finito, in quanto è una infinita non numerabile, ma possiamo considerare un intervallo di frequenza da  $-B$  a  $B$ , introducendo il concetto di banda di un segnale.

Il segnale, che ha un certo spettro, viene approssimato andando a considerare soltanto  $\int$  un intervallo di frequenza.

~~Il caso del secondo integrale è l'energia dell'errore~~  
Il modulo al quadrato, integrato nel tempo, dà una energia dell'errore (con una potenza in quanto è l'area dell'impulso). Esso va a zero a  $B \rightarrow \infty$ , in quanto il nucleo integrabile in tali casi, è  $x(t)$ , in cui si starebbe sommando  $x(t) - x(t)$ .



Dunque, tutto il limite è l'energia dell'impulso, che va a zero se  $B \rightarrow \infty$ .

Si può dimostrare che questa condizione di limite si porta a dire che è verificata se il segnale è caratterizzato dalle sommabilità del segnale integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

che è l'energia di un segnale, per definizione.

Ora abbiamo una condizione che corrisponde a quella della completezza per lo sviluppo in serie; e' che il segnale sia a energia.

Confrontando tale espressione con l'espressione di impulso di un segnale, troviamo due cose che si somigliano molto:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  è l'impulso

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  è un segnale di energia

Le due condizioni non sono immediatamente equivalenti e' una all'altra, però nel caso dei segnali possiamo stare tranquilli che un segnale impulsivo è un segnale di energia sono quasi due usatazioni che si corrispondono. C'è da dire che per definire la trasformata di Fourier è stato bisogno di ricorrere, ~~in~~ un modo un po'

filtrato, davanti al passaggio al limite, ma le due condizioni poco scritte non hanno bisogno, per essere valide, che il segnale si riferisca ad un intervallo di tempo finito.

Dunque il dominio della Trasformata è più generale, rispetto alle proprietà formali di raggruppamento delle espressioni dello  $T$ , di Fourier e dello Autotrasformato di Fourier.

I segnali che godono di queste proprietà sono in condizioni di essere trasformabili con Fourier, essi sono, e devono essere, segnali di energia. Questo perché un segnale di potenza non rispetta queste condizioni, anche se, per particolari segnali di potenza, per mezzo di opportuni artifici, è possibile effettuare la Trasformata di Fourier.

Ad un certo punto si dovrà capire quale sia lo strumento per trattare i segnali di potenza.

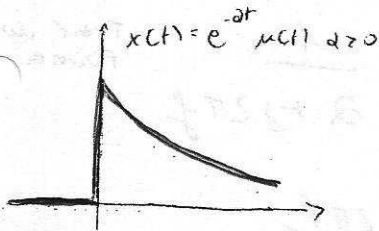
Questo perché è impossibile supporre che non ci siano strumenti che operano in frequenza su tutti i tipi di segnali. Ad ora il discorso, che consiste nell'elucidare certe frequenze che "intrattano" pensarlo, nel dominio della frequenza, mentre non lo è nel dominio del tempo.

A questo punto vediamo degli esempi.

Fine  
nota 3.



nota 4<sup>tr</sup> Se il segnale dato ammette la Trasformata di Fourier occorre verificare che  $\int_0^{\infty} e^{-2t} dt < \infty$



oppure, pensando all'energia del segnale, stabilire se il quadrato del segnale si è integrato e l'integrale si è finito, ovvero

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} dt$$

Se converge un ma no, allora converge anche l'altro, le due condizioni risultano essere equivalenti.

Prendendo il primo:  $\int_0^{\infty} e^{-2t} dt \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$

Prendendo il secondo:  $\int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$

Quindi, sicuramente questo segnale ammette la Trasformata di Fourier, infatti soddisfa le condizioni per cui l'integrale di Fourier esiste.

E' il  $e^{-}$ :  $\int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+j2\pi f)t} dt$

Si moltiplica e divide per  $2 + j2\pi f$ , ottenendo

$$\frac{1}{2 + j2\pi f} \int_0^{\infty} e^{-s} ds = \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad \text{Trasf. di Fourier}$$

con la sostituzione  $s = 2 + j2\pi f$ .  
La trasformata ottenuta è una delle trasformate fondamentali, e vale:

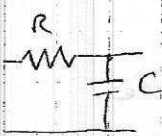
$$\text{Quindi } X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f}$$

$$\text{La } x(t) = e^{-2t} u(t)$$

Questo segnale corrisponde ad una soluzione impolare, visto in qualche modo parlante della risposta impulsiva di un circuito.

Questo significa che la risposta impulsiva di un circuito RC passa-basso, fatto da una resistenza e un condensatore,

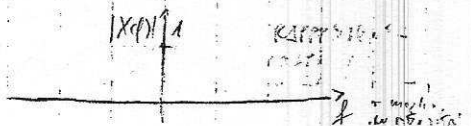
$$\frac{R}{R+C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t), \text{ espressione numerica e meno di una costante e quella vista nell'esempio.}$$



Il modulo dell'espressione è

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (2\pi f)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(Rc)^2 + (C\omega)^2}}$$

e dato è una funzione pari  
caratteristica  
che anche



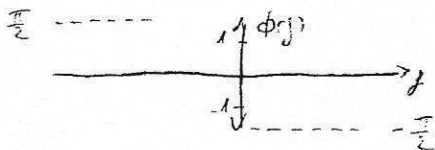
La f.d.r. è il opposto della f.d.r. del denominatore\*.

La parte di un numero complesso è l'arco la cui tangente è la parte immaginaria (s) diviso la parte reale (a).

Dunque la parte di tale numero complesso è

$$\phi(f) = -f_g^{-1} \frac{2\pi f}{2}$$

RAPPRESENTAZIONE  
LO SPETTRO DI FASE



Lo spettro di fase del segnale è un andamento lineare da  $\frac{\pi}{2}$  a 0 in  $f=0$  e poi va a  $-\frac{\pi}{2}$  all'infinito.

l'arco lo unisco a 0, e 0.

Fine  
note 4

~~~~~

OSSERVAZIONE FINALE

Si osservi che in  $X(f)$ , per  $f=0$ , si ottiene l'arco della funzione.

\* nota sul calcolo di  $\phi_g$ : numero immaginario  $a + bi$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2} \text{ con } k = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\phi_g \text{ arco} \left( -\frac{b}{a} \right) = \text{arco} \left( \frac{-k \cdot 2\pi f}{\frac{a}{k}} \right) = \text{arco} \left( -\frac{2\pi f b}{a} \right) =$$

$$= -\text{arco} \left( \frac{2\pi f b}{a} \right) \text{ in quanto arco} \left( \frac{a}{k} \right) = \text{arco} \left( \frac{a}{k} \right)$$

to find a different value for  $\alpha$

to find the new maximum value of  $\alpha$  for the  
new tangent to the curve  $y = x^2 + 2x + 1$  at the point  
where  $x = 1$ .

Derivative of  $y = x^2 + 2x + 1$  is  $2x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$



to find the new maximum value of  $\alpha$  for the  
new tangent to the curve  $y = x^2 + 2x + 1$  at the point  
where  $x = 1$ .

to find the new maximum value of  $\alpha$  for the  
new tangent to the curve  $y = x^2 + 2x + 1$  at the point  
where  $x = 1$ .

to find the new maximum value of  $\alpha$  for the  
new tangent to the curve  $y = x^2 + 2x + 1$  at the point  
where  $x = 1$ .

# LEZ. 7 - LA TRASFORMATA DI FOURIER

SI DEFINISCE TRASFORMATA DI FOURIER  $X(f)$  DEL SEGNALE  $x(t)$  LA SEGUENTE ESPRESSIONE

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt ; \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

scrittura formale, per cui  
 il segnale  $x(t)$  corrisponde alla  
 trasf.  $X(f)$  e  
 viceversa

E ANTITRASFORMATA DI FOURIER,  $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df ; \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

PER OTTENERE QUESTO RISULTATO SI EFFETTUA UN PASSAGGIO AL LIMITE DELLO SVILUPPO IN SERIE CRISTOFFANI DI FOURIER PER CUI IL SEGNALE  $x(t)$  È DATO DALLA SOMMA DI INFINITE SINUSOIDI, CON UN COEFFICIENTE  $c_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t / T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$$

$k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  ordine  
 SI SOSTITUISCE  $\frac{1}{T}$  CON  $\Delta f$ , CHE È LA DISTANZA FRA LE FREQUENZE  

 distanza fra le  
 righe dello spettro  
 di ampiezza e di  
 fase.

prodotto scalare del segnale  
 e un esponenziale che  
 individua la freq.  $k/T$ ,  
 con  $c_k$

SI ESTENDE, ARBITRARIAMENTE, L'INTERVALLO DI CONOSCENZA DEL SEGNALE INTRODUCENDO UN NUOVO SEGNALE CHE È IDENTICO A QUELLO INIZIALE NELL'INTERVALLO INIZIALE ED È NUOVO AL DI FUORI.

A QUESTO PUNTO LO SVILUPPO IN SERIE È RISCRIVIBILE COME

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \Delta f t} \cdot \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k \Delta f t} dt$$

in cui  $\frac{1}{T} = \Delta f < \Delta f$

OPERANDO UN LIMITE DELLO SVILUPPO IN SERIE PER  $T \rightarrow \infty$   
 SI PASSA DAL SALTO DISCRETO DI FREQUENZA  $\Delta f$  AL  
 DIFFERENZIALE  $df$ , DA  $k \cdot \Delta f$  A  $f$ , DALLA SOMMATORIA  
 $\sum$  ALL'INTEGRALE  $\int_{-\infty}^{\infty}$ , OVVERO

$$\Delta f \rightarrow df ; k \cdot \Delta f \rightarrow f ; \sum \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

OTTENENDO

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Definizione della trasformata di Fourier

SE SUSSISTE LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA  
 TRASFORMATA DI FOURIER, ALLORA  $x(t)$  È UN  
 SEGNALE IMPULSIVO.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Esistenza della trasformata di Fourier  
 $\Rightarrow$  sommabilità di  $x(t)$  nel senso  
 di Lebesgue  $\Rightarrow x(t)$  è un segnale  
 impulsivo

SEGNALI DI ENERGIA

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \text{ cioè } x \text{ l'energia è finita, allora}$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 - \int_{-B}^B |X(f)|^2 df = 0$$



107. +

dal minuto 14:47

Per quanto riguarda la Trasformata di Fourier, sotto le condizioni di Dirichlet siamo garantiti delle sommatezze dell'integrale che definisce la Trasformata di Fourier, mentre nel corso dello sviluppo in serie era la convergenza della serie.

Nello sviluppo in serie di Fourier le condizioni di Dirichlet non garantiscono un numero di oscillazioni per commettere un certo tipo di errore controllabile.

Era stato necessario introdurre il concetto di completezza e cioè andare a considerare la potenza dell'errore.

In questo caso, per la Trasformata di Fourier, si ha una considerazione analoga.

Considerando l'espressione

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \int_{-B}^B X(f) e^{j2\pi f t} df|^2 dt = 0$$

Con la serie la limitazione era la  $-u$  e  $u$ , andando a individuare un certo intervallo di frequenza, ma con la Trasformata non possiamo più individuare un numero finito, si ha e' una ~~serie~~ infinita non numerabile.

però possiamo considerare un intervallo di frequenze da  $-B$  a  $B$ , cominciando a introdurre il concetto di banda di un segnale.

Si sta approssimando il segnale, che ha un certo spettro, e si sta considerando solo l'espressione che formalmente è quella di una entità trasformata. Si passa dunque da una frequenza al tempo per mezzo di un integrale.

L'entità trasformata è estesa da  $-\infty$  a  $+\infty$ , considerando un intervallo.

Stiamo, in sostanza, considerando soltanto un intervallo (da  $-B$  a  $+B$ , con  $B \rightarrow \infty$ ) di frequenze.

Questa, come già ho scritto, è una approssimazione.

Rappresenta l'energia dell'errore, che va da 0 a  $B \rightarrow \infty$ .

Questa condizione di limite porta a dire che essa è verificata

se il segnale è caratterizzato dalle sommabilità dell'integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ , che, per definizione, è l'energia del segnale.

UNA CONDIZIONE CHE CORRISPONDE ALLA COMPLETEZZA DELLO SVILUPPO IN SERIE E' QUELLA CHE IL SEGNALE SIA DI ENERGIA FINITA.

Questa espressione, con quello dell'impulsività di un segnale, hanno una certa somiglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{e l'impulsività} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Le due condizioni non sono riconducibili una all'altra immediatamente, ma nel caso di un segnale impulsivo e un segnale di energia sono quasi corrispondenti.

# LEZ. 8 - PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER



T. dell'impulso di Dirac

$$x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1^*$$

QUESTO RISULTATO VUOL DIRE CHE NELL'IMPULSO DI DIRAC SONO PRESENTI TUTTE LE FREQUENZE CON LO STESSO PESO QUINDI L'IMPULSO DI DIRAC NON HA ALCUNA RELAZIONE IN FREQUENZA.

\* Siccome l'impulso di Dirac legge il valore della funzione nel punto 0, il punto di applicazione, l'esponenziale in  $t=0$  ha valore 1  $\Rightarrow$  l'integrale  $\hat{=}$  per l'impulso di Dirac che, per definizione,  $\hat{=}$  parso 1.

Per il calcolo della Trasformata di Fourier si applica direttamente la definizione di trasformata e ricordando le proprietà campionatrici dell'impulso di Dirac

$$x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

Per la proprietà campionatrice abbiamo: (Lec 2 (1)) 5-6

L'impulso di Dirac è definito come  $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(t)$ , l'altezza va a  $\infty$ , l'area è unitaria:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  per def.

$$\text{Quindi } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad x \quad t_0 \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}$$

La proprietà campionatrice si rivela moltiplicando un segnale

per l'impulso di Dirac in un punto, da ricavare nel punto  $t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0) \delta(t-t_0) dt = s(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = s(t_0)$$

ovvero il valore del segnale in  $t_0$ .

REPORT ON THE PROGRESS OF THE WORK DURING THE YEAR 1907

The work of the year has been devoted to the study of the properties of the various forms of the function  $\zeta(s)$  and to the determination of the constants  $A$  and  $B$  in the asymptotic expansion of  $\zeta(s)$  for large values of  $s$ .

For the calculation of the constants  $A$  and  $B$  it is necessary to know the values of the function  $\zeta(s)$  for large values of  $s$ . This is done by using the asymptotic expansion of  $\zeta(s)$  for large values of  $s$ .

The results of the calculations are given in the following table. The values of  $A$  and  $B$  are given in the first two columns. The values of  $\zeta(s)$  for large values of  $s$  are given in the third column.

La Trasformata di Fourier di segnali reali può essere iscritta, applicando la formula di Eulero  $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ , nella combinazione lineare di un integrale con il coseno e di un integrale con il seno. Da parte di definizione, quello di seno e di coseno.

Il coseno è funzione pari, il seno è funzione dispari, ed è la parte immaginaria della Trasformata.

Quindi se il segnale è pari l'integrale col coseno è non nullo, mentre quello col seno è nullo.

Se il segnale è dispari l'integrale col coseno è nullo, mentre quello col seno è non nullo.

Da questo deriva che la Trasformata di Fourier di segnali reali e pari è reale e pari e di segnali reali e dispari è immaginaria e dispari. Inoltre un segnale reale può essere decomposto in somma di parte pari e di parte dispari.

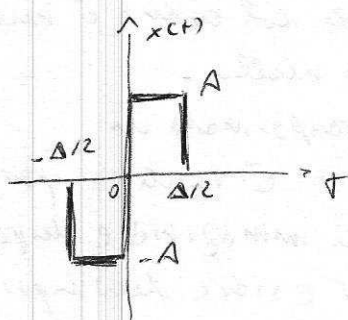
A questa scomposizione corrisponde una somma algebrica, nella Trasformata, tra la parte reale della Trasformata e la parte immaginaria della Trasformata.

Come esempio di Trasformata  $X(f)$  reale e pari di un segnale reale e pari viene mostrato il segnale di un impulso rettangolare di ampiezza  $A$ , durata  $\Delta$ , centrato in 0:

$$x(t) = A \text{rect}_{\Delta}(t) \leftrightarrow X(f) = A \Delta \frac{\sin(\frac{\pi f \Delta}{2})}{\frac{\pi f \Delta}{2}} = A \Delta \text{sinc}(\frac{\pi f \Delta}{2})$$

Come esempio di T. d. F. immaginaria e dispari di un segnale reale e dispari è proposta la T. d. F. del segnale

$x(t) = A \text{rect}_{\Delta}(t) \text{sign}(t)$ , che è un impulso rettangolare di ampiezza  $A$ , durata  $\Delta$ , centrato in 0. È negativo, quindi  $-A$  come ampiezza per  $t < 0$  ed è positivo, quindi ha ampiezza  $A$  per  $t > 0$



$$X(f) = -j A \Delta \text{sinc}\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right) \text{sin}\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right)$$

$X(f)$  è calcolata applicando le proprietà di essere la T. d. F. di un segnale reale e dispari, quindi l'integrale che definisce la T. d. F. contiene solo la parte immaginaria, quella col  $-j$ , ovvero

$$X(f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

Della  $x(t)$  si considera il solo intervallo  $[0, \Delta/2]$ , quindi l'integrale va moltiplicato per 2 e  $x(t)$  si sostituisce con il valore che esso stesso assume in tale intervallo, cioè  $A$ . Si ottiene dunque

$$X(f) = -2 A j \int_0^{\Delta/2} \sin(2\pi f t) dt =$$

$$= - \frac{2 \Delta j}{\cancel{\pi f}} \cdot \left[ \frac{-\cos(2\pi f t)}{2\pi f} \right] / \frac{\Delta}{2} =$$

primitiva de  $\cos(x)$

$$= - 2 \Delta j \cdot \left[ \frac{-\cos(2\pi f \cdot \frac{\Delta}{2})}{2\pi f} + \frac{\cos(0)}{2\pi f} \right] =$$

$$= - \frac{2 \Delta j}{2\pi f} \left[ 1 - \cos\left(\pi f \frac{\Delta}{\cancel{2}}\right) \right]$$

A questo punto si considera la Trasformazione Trigonometrica

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$

$\cos^2 x - \sin^2 x, \sin^2 + \cos^2 = 1$

per cui  $\cos(\pi f \Delta) = \cos(2\pi f \frac{\Delta}{2}) = 1 - 2 \sin^2(\pi f \frac{\Delta}{2})$   
per cui

$$X(f) = - \frac{\Delta j}{\pi f} \left[ 1 - 1 + 2 \sin^2\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right) \right] =$$

$$= - \frac{\Delta j}{\pi f} \cdot 2 \cdot \sin\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right) =$$

$$= - \frac{2 \Delta j}{\pi f} \cdot \pi f \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{\pi f \frac{\Delta}{2}} \cdot \sin\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right) \right)}_{\text{sinc(.)}} \cdot \sin\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$= - A_j \Delta \underbrace{\text{sinc}\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right)}_{\text{multiplicando}} \underbrace{\sin\left(\pi f \frac{\Delta}{2}\right)}_{\text{dove}}$$

Per la proprietà di decomposizione di un segnale reale in parte pari e in parte dispari, secondo la quale

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \leftrightarrow \underline{X}(jf) = R(jf) - j Y(jf)$$

in cui

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} ; \quad x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = x(t) - x_p(t)$$

e

$$x_p(t) \leftrightarrow \underline{X}(x_p(t)) = R(jf) \quad \text{Trasf. della parte reale}$$

$$x_d(t) \leftrightarrow \underline{X}(x_d(t)) = -j Y(jf) \quad \text{-j \cdot Trasf. della parte immaginaria}$$

possiamo, ad esempio calcolare la Trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = e^{-2t} u(t)$$

oltre trasformate. Infatti

trasf. della parte pari  
di un segnale reale  
e dispari

$$X(jf) = \frac{1}{2 + j2\pi f} = \frac{2}{2^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{2^2 + (2\pi f)^2}$$

$R(jf)$ , da cui deduciamo  $x_p(t)$

$Y(jf)$ , da cui deduciamo  $x_d(t)$

La parte pari del segnale è  $x_p(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|}$ ;

la parte dispari è  $x_d(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|} \operatorname{sgn}(t)$ .

Assieme dunque

$$x_p(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|} \leftrightarrow R(jf) = \frac{2}{2^2 + (2\pi f)^2}$$

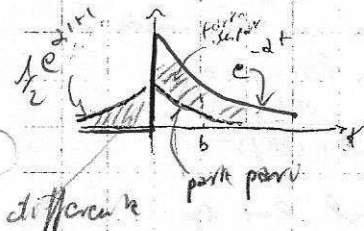
$$x_d(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|} \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow Y(jf) = -j \frac{2\pi f}{2^2 + (2\pi f)^2}$$



# DECOMPOSIZIONE DI SEGNALI REALI IN PARTE PARI E PARTE DISPARI

La parte pari del segnale.

SE LA PARTE PARI DI UN SEGNALE È  $\frac{x(t) + x(-t)}{2}$  SI PRENDE



UN VALORE POSITIVO E CI ASSUMO UN VALORE PER TEMPI NEGATIVI, CIOÈ È 0 E SI DIVIDE PER 2.

QUINDI LA PARTE PARI DEL SEGNALE È IL SEGNALE DIVISO PER 2, IN QUANTO SI SOMMA DI PER QUESTO RIGUARDA IL VALORE PER TEMPI NEGATIVI.

L'ANDAMENTO È DUNQUE DEL TIPO — , ED È LA PARTE PARI.

QUESTO SIGNIFICA CHE PER TEMPI NEGATIVI SI HA LO STESSO ANDAMENTO DI TEMPO CALCOLATO PER TEMPI POSITIVI, MA RIBALTO.

DUNQUE ABBIAMO STABILITO LA PARTE PARI DEL SEGNALE, CIOÈ È UN ALTRO SEGNALE, ANALITICAMENTE È:

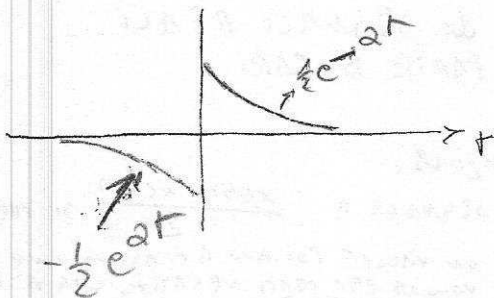
$\frac{1}{2} e^{-2t}$  per tempi positivi e  $\frac{1}{2} e^{2t}$  per tempi negativi, che contemporaneamente diventano  $\frac{1}{2} e^{-2|t|}$

Dunque  $x_p(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|}$ , del quale conosciamo la Trasformata di Fourier  $\frac{1}{2 + \omega^2}$ , senza averla calcolata, cioè senza aver fatto l'integrale.

La parte dispari del segnale.

Essa è quanto manca alla parte pari per ottenere il segnale di partenza.

Essa sarà data dalla differenza (III) evidenziata sui valori di tempo positivi che sui valori di tempo negativi l'andamento sarà del tipo:



Dunque è dato l'andamento della funzione, che è dispari.

Sostituendo e  $\frac{1}{2} e^{-2t} \operatorname{sgn}(t)$ , la sua trasformata di Fourier è:

$$-j \frac{2\pi f}{2^2 + (2\pi f)^2}$$

Tale metodologia è interessante al fine di poter determinare un intero repertorio di trasformate

Possiamo dunque ricordare che il segnale  $e^{-2t} \operatorname{sgn}(t)$  corrisponde lo T. di Fourier  $\frac{1}{2 + j2\pi f}$

$$e^{-2t} \operatorname{sgn}(t) \rightarrow \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad \text{segnale}$$

$$e^{-2|t|} \rightarrow \frac{2}{2^2 + (2\pi f)^2} \quad \text{parte pari}$$

$$\frac{1}{2} e^{-2|t|} \operatorname{sgn}(t) \rightarrow -j \frac{2\pi f}{2^2 + (2\pi f)^2} \quad \text{parte dispari}$$

# TRASFORMATA di FOURIER

di SEGNALI REALI

Lea 8  
 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$   
 derivata  
 seno, coseno  
 integrali  
 parte reale, parte immaginaria  
 dispari

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

parte reale, pari
parte immaginaria, dispari

LA PARTE REALE

È UNA FUNZIONE

PARI di  $f \Rightarrow$  il seno  
 ha lo stesso valore per  $f$  e  $-f$ ,  
 come il quadrato

LA PARTE IMMAGINARIA È

UNA FUNZIONE

DISPARI di  $f \Rightarrow$  il seno cambia  
 di segno nel passaggio da  $+f$  a  $-f$ ,  
 come il cubo

$|X(\omega)|$  è lo spettro di ampiezza,  
 è una funzione pari di  $f$

$\text{Arg}(X(\omega))$  è lo spettro di fase,  
 è una funzione dispari di  $f$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}$$

$$\text{Arg}(X(\omega)) = \phi_x(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}$$

\* Formula di Eulero usata

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

numeri complessi

$$z = a + bj$$

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$z = r e^{j\varphi}$$

$$z = r e^{j\varphi} \quad \text{arctan} \left( \frac{b}{a} \right)$$

• SEGNALI REALI e PARI  $\Rightarrow X(f)$  Reale e PARI

• SEGNALI REALI e DISPARI  $\Rightarrow X(f)$  Immaginaria e DISPARI

I SEGNALI REALI POSSONO ESSERE DECOMPOSTI  
IN PARTE PARI E IN PARTE DISPARI.

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \leftrightarrow X(f) = R(f) - j Y(f)$$

$$x_p(t) = [x(t) + x(-t)] / 2$$

$$x_d(t) = [x(t) - x(-t)] / 2 = x(t) - x_p(t)$$

$$x_p(t) \leftrightarrow R(f)$$

$$x_d(t) \leftrightarrow -j Y(f)$$

PRINCIPIO DI DUALITA'

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt$$

Principio di dualità:

Andamento, nel tempo, di un segnale che ha la forma della Trasformata

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi(f-t)} df = X(-f)$$

ovvero  $X(f) \leftrightarrow X(-f)$

Dualmente, scrivendo l'entrambe scambiando tempo e frequenza, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{-j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi(f-t)} dt = X(-t)$$

ovvero  $x(f) \leftrightarrow X(-t)$



• ADDITIVITA' e LINEARITA' della TRASFORMATA

$$y(t) = A x(t) \leftrightarrow Y(f) = A X(f)$$

• AREA SOTTESA A UN SEGNALE  $x$  e UNA TRASFORMATA

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

valore dello  $\text{max}$  nell'0  $\text{Hz}$

Area del segnale

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

valore del segnale nell'0  $\text{Hz}$

Area dello  $\text{max}$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

• INVERSIONE DELL'ASSE

$$x \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$e \quad y(t) = x(-t)$$

$$\text{allora} \quad x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

• CONIUGAZIONE DI UN SEGNALE

$$x \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$e \quad y(t) = x^*(t)$$

$$\text{allora} \quad y(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

• CAMBIAMENTO DI SCALA

$$x \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$e \quad y(t) = x(at), \quad a > 0 \Rightarrow \text{dilatazione ome dei tempi}$$

$$\text{allora} \quad Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} d(\tau/a)$$

$$\text{se } x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$\text{e } y(t) = x(at), \text{ con } a < 0$$

$$\text{allora } x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

nel caso  
in cui

$$y(t) = x(-|a|t)$$

$$\text{allora } x(|a|t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{|a|}\right) \quad \text{L' inversione dell'ora dei tempi}$$

$$\begin{aligned} x(-|a|t) = x(at) &\leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(-\frac{f}{|a|}\right) = \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Cioè

$$x(at) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

**OVVERO** ([LuisE], pag 75)

Moltiplicare  $t$  per un coefficiente  $a$  significa

$|a| > 1 \Rightarrow$  compressione della scala dei tempi (accelerazione del movimento)

$|a| < 1 \Rightarrow$  dilatazione della scala dei tempi (rallentamento del movimento)

$a < 0 \Rightarrow$  inversione della scala dei tempi

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \text{ sostituendo } \tau = at \text{ nell'integrale}$$

$$\text{per } a > 0 \quad x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right), a > 0$$

$$\text{per } a < 0 \quad x(at) \leftrightarrow -\frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right), a < 0$$

$$\text{da cui } x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

# LEZ. 9 - IL RITARDO e LA MODULAZIONE PRODOTTO

- EFFETTO DEL RITARDO SULLO SPETTRO DI UN SEGNALE

se  $x(t) \leftrightarrow X(f)$

e  $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow y$  è ritardato di  $t_0$  rispetto a  $x$ ;

allora  $Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$  se poi  $x(t + t_0)$  sarebbe un anticipato.

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) - 2\pi f t_0$$

↑  
ritardo

con  $t \Rightarrow$  anticipo  
LA PENDENZA DELLA RETTA SU CUI SI APPOSIAN LO SPETTRO DI FASE  $-2\pi f t_0$

→ SPETTRO DEL SEGNALE RITARDATO

LO SPETTRO DEL SEGNALE RITARDATO SI OTTIENE MOLTIPLICANDO QUELLO NON RITARDATO PER:

$$e^{-j2\pi f t_0}, \text{ che dunque è l'effetto del ritardo } t_0$$

Di nuovo possiamo definire la relazione della trasformata di un segnale.

- TRASLAZIONE DELLA TRASFORMATA DI UN SEGNALE

se  $X(f) \leftrightarrow x(t)$



$$e^{j2\pi f_0 t} X(f-f_0)$$

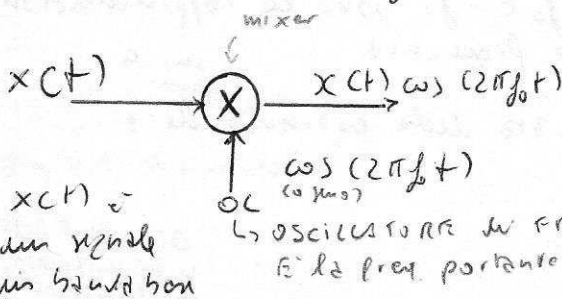
$$X(f-f_0) = e^{j2\pi f_0 t} X(t)$$

Questa è una operazione basilare nella trasmissione di informazioni, che è la modulazione di ampiezza, di cui la modulazione prodotto è una forma ben specificata.

La modulazione è necessaria, altrimenti non sarebbero possibili le trasmissioni, poiché in bande non occupate da antenne lunghe chilometri.

## • MODULAZIONE PRODOTTO

$$X(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$



spettro del segnale,  
 nasce in banda base e viene portato intorno alla freq.  $f_0$   
 che è la portante.

$X(t) \cos(2\pi f_0 t)$  è un segnale adatto ad essere trasmesso in modo efficiente, il cui spettro è stato portato intorno alla frequenza  $f_0$ .

La regola si applica al calcolo dello spettro in situazioni particolari

$$e^{j2\pi f_0 t} X(t) \leftrightarrow X(f-f_0)$$

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

spettro di  $X(t)$  traslato in  $f_0$

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

$$A \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

$$A \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow -j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + j \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

Nel coseno e nel seno  $f_0$  è la frequenza portante;  
Lo spettro è calcolato considerando le formule di  
Eulero del coseno e seno, ovvero:

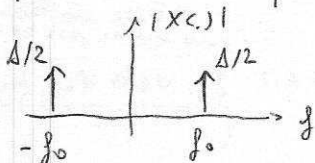
$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\sin 2\pi f_0 t = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

e grazie alla corrispondenza  $e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$

Nel risultato finale  $f_0$  e  $-f_0$  sono le rappresentazioni  
simboliche di una stessa frequenza

Lo spettro di ampiezza della cosinosside è



Lo cosinosside "è la portante"

Lo spettro di fase della cosinosside è nullo.

Lo spettro di ampiezza della sinosside è lo stesso.

Lo spettro di fase della sinosside è  $\pm \frac{\pi}{2}$ , un elemento lo

trasforma da  $\frac{\delta(f - f_0)}{2j} - \frac{\delta(f + f_0)}{2j}$ .

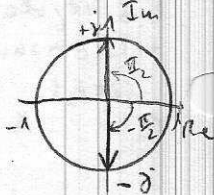
Sullo frequenza positiva il fattore moltiplicativo è  $1/2j$ .

$1/j$  è un numero complesso di fase di  $\pi/2$

e fase  $-\pi/2$ , che è dunque la fase del seno nella

freq. positiva - quella dello seno nella freq. negativa è  $\pi/2$ .

Notare che le fasi su qualsiasi scala devono essere simmetriche.



Esempio 1. Lezione 3 sull'effetto del ritardo sullo spettro di un segnale

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) = x(t - t_0), \quad y(t) \text{ è un segnale ritardato di } t_0$$

$$Y(f) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

rispetto a  $x(t)$ , se  $t_0 > 0$  si ha un ritardo di  $y(t)$  rispetto a  $x(t)$ ,  $y(t)$  avviene dopo  $t_0$  rispetto a  $x(t)$ .

Quindi  $e^{-j2\pi f t_0}$  rappresenta un fattore che tiene conto del ritardo.

Si nota che

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

Lo spettro di ampiezza è invariato.

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) - 2\pi f t_0$$

Lo spettro di fase è variato.

Lo spettro di fase è variato. retta a un'angolazione  $\phi_y$  di pendenza  $-2\pi f t_0$  (V); per  $t_0 > 0$  la pendenza è  $+2\pi f t_0$  (V)

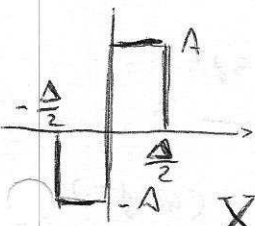
Lo spettro di ampiezza del segnale ritardato è uguale a quello del segnale non ritardato, il che è intuitivo in quanto il ritardo non può cambiare il segnale.

Dato il segnale  $x(t) = A \text{rect}_{\frac{\Delta}{2}}(t - \frac{\Delta}{4}) - A \text{rect}_{\frac{\Delta}{2}}(t + \frac{\Delta}{4})$ ,

si è analizzato il segnale scomponendolo in parte pari e dispari,

notando che è composto dalla combinazione lineare di due impulsi rettangolari, di cui quello positivo è ritardato e quello negativo è anticipato.

Quindi lo spettro di ampiezza è  $X(f) = \frac{A\Delta}{2} \text{sinc}(\pi f \frac{\Delta}{2}) e^{-j2\pi f \frac{\Delta}{4}} - \frac{A\Delta}{2} \text{sinc}(\pi f \frac{\Delta}{2}) e^{+j2\pi f \frac{\Delta}{4}}$

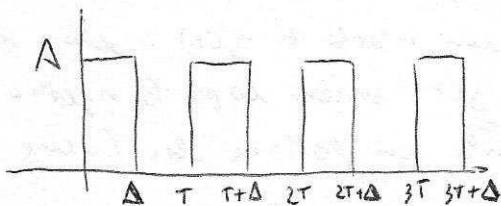


$$= \frac{A\Delta}{2} \text{sinc}(\pi f \frac{\Delta}{2}) [e^{-j2\pi f \frac{\Delta}{4}} - e^{+j2\pi f \frac{\Delta}{4}}] = jA\Delta \text{sinc}(\pi f \frac{\Delta}{2}) \sin(\pi f \frac{\Delta}{2})$$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2j} \Rightarrow 2j \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$

## Esempio 2. Lezione 9

Calcolare la T. di F. di un segnale composto dalla sequenza di 4 impulsi rettangolari, ognuno di durata  $\Delta$  e distanziato di una quantità  $T$ .



$$x(t) = A \cdot \sum_{k=0}^3 \text{rect}_{\Delta} \left( t - \frac{\Delta}{2} - kT \right)$$

Il segnale  $x(t)$  è una somma di 4 segnali  $\Rightarrow$  la trasformata è una somma di trasformate.

Il segnale successivo al primo è ricorato per un ritardo. Le T. di F. sarà la somma di 4 addendi con una parte inalterata e una parte del ritardo introdotto che è pari a  $T$ ,  $2T$  e  $3T$ .

Si ricorre (vd. nota relativa) che

$$\begin{aligned} X(f) &= A \Delta \text{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} \sum_{k=0}^3 e^{-j2\pi k f T} = \\ &= A \Delta \text{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} \frac{1 - e^{-j2\pi 4 f T}}{1 - e^{-j2\pi f T}} = \\ &= A \Delta \text{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} \underbrace{e^{-j3\pi f T}}_{\text{Termine di fase}} \frac{\sin(4\pi f T)}{\sin(\pi f T)} \\ &\quad -3 \text{ da } -4 - (-1) \end{aligned}$$

Descrizione dello Trasl. di Fourier  
relativa all' esempio 2

$$X(f) = A \Delta \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} \sum_{k=0}^3 e^{-j2\pi k f T}$$

$X(f)$  è lo T. di F. di un rettangolo di  
ampiezza  $A$  e durata  $\Delta$

Il fattore ~~scelto~~  $e^{-j\pi f \Delta}$  è  
presente perché già il primo segnale è  
centrato in  $\Delta/2$ , per cui si dovrà scorrere  
nello spettro, che sarà comune a tutte le  
spettre dei 4 addendi, questo termine di  
spostamento; dunque  $e^{-j\pi f \Delta}$  è un termine  
di spostamento.

Poi si mette la somma dei 4 spettri,  
per  $k$  da 0 a 3. Quando  $k=0$  abbiamo  
l'intervallo di ritardo rispetto alla prima sinusoide  
e infatti l'addendo vale 1 in questo caso.  
Per  $k=1, 2, 3$  troviamo addendi con ritardi  
 $T, 2T$  e  $3T$ .

Il problema è ora determinare lo spettro per  
arrivare a una formula finale.

A tale fine si ricorre alle successioni geometriche.

La successione geometrica e la somma di  
 tanti addendi di ragione  $q$ .

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1} = \text{, } N \text{ addendi}$$

$$= \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

Nel nostro caso  $N=4$ , e la ragione e'  
 $q = e^{-j2\pi fT}$ , si verifica per  $k$  l'esponente  
 si cambia di  $k$ .

Quindi  $\sum_{k=0}^3 e^{-j2\pi k fT}$  e' una successione  
 geometrica di 4 addendi e di ragione  
 $q = e^{-j2\pi fT}$ , per cui e':

$$\frac{1 - e^{-j2\pi fT \cdot 4}}{1 - e^{-j2\pi fT}}$$

che e' l'effetto dei  
 4 addendi nello stesso

L'espressione puo' essere ottenuta da quella sopra e'

$$e^{-j3\pi fT} \frac{\sin(4\pi fT)}{\sin(\pi fT)}$$

avendo messo in  
 $e^{-j2\pi fT} \cdot e^{j2\pi fT} = 1$

Evidente al numeratore, quindi al  
 numeratore si ha  $e^{-j2\pi fT} (e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT})$ .

Al denominatore mettiamo in evidenza  $e^{-j\pi fT}$ , quindi  
 al denominatore otteniamo  $e^{-j\pi fT} (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT})$ .

Se al num. che al den. siamo lo stesso di  $e^{-j\pi fT}$  di  
 segno opposto, si applica l'Euler e otteniamo il risultato  
 finale avendo anche moltiplicato e diviso per 2j. Due volte 1

# LEZ. 10 - LA DERIVATA e L'INTEGRAZIONE

- TRASFORMATA della DERIVATA di un SEGNALE

$$\text{se } x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$\text{e se } y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

allora

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

e, in generale

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- ANTI-TRASFORMATA della DERIVATA di uno SPETTRO

$$\text{se } x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$\text{e } Y(f) = \frac{d}{df} X(f)$$

allora

$$-j2\pi t x(t) \leftrightarrow \frac{d}{df} X(f)$$

$$\text{cioè } y(t) = -j2\pi t \cdot x(t)$$

$$t x(t) \leftrightarrow \frac{1}{-j2\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

↑  
moltiplica  
per t

e, in generale  $\frac{d^n}{df^n} X(f) \leftrightarrow (-j2\pi t)^n x(t)$

$$\text{e } t^n x(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

◦ TRASFORMATA dell'INTEGRALE di un SEGNALE

$$\text{se } x(t) \rightarrow X(f)$$

$$\text{e } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau, \text{ derivando ambo i membri}$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

$$\text{allora } 2j\pi f Y(f) = X(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2j\pi f} X(f)$$

solo se  $y(t)$  è trasformabile



# Trasformata delle derivate di un segnale

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j 2\pi f \bar{X}(f)$$

Dimostrazione: poiché  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) e^{j 2\pi f t} df$ , allora

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) e^{j 2\pi f t} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \bar{X}(f) e^{j 2\pi f t} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) \frac{d}{dt} e^{j 2\pi f t} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) \cdot j 2\pi f \cdot e^{j 2\pi f t} df \quad \text{c.v.d.}$$

questa è formalmente una trasformazione, ed è l'antitrasformata di  $\bar{X}(f) \cdot j 2\pi f$ .

Quindi possiamo scrivere  $\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j 2\pi f \bar{X}(f)$

Si è ottenuto che una operazione di derivazione è diventata una operazione di prodotto e questo mostra la potenza dell'operazione di Trasformata di Fourier.

$$x(t) \leftrightarrow \bar{X}(f)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) e^{j 2\pi f t} df$$

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} dt$$

per la linearità delle derivazioni applicata alla definizione di antitrasformata.

# Antitrasformata della derivata di uno spettro

$$-j2\pi f \cdot X(f) \longleftrightarrow \frac{d}{df} X(f)$$

Dimostrazione

$$\frac{d}{df} X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{df} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{df} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -j2\pi f \cdot x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

In questo calcolo ho derivato

C.V.D.

che è formalmente l'espressione di una trasformata, del segnale  $-j2\pi f X(f)$ , quindi possiamo scrivere la relazione di corrispondenza

$$-j2\pi f \cdot X(f) \longleftrightarrow \frac{d}{df} X(f)$$

Lezione n. 10

LA DERIVAZIONE E L'INTEGRAZIONE

Prof. Tullio Bucciarelli  
40'04"

- La trasformata della derivata di un segnale
- La trasformata dell'integrale di un segnale

**Trasformata della derivata di un segnale**

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f X(f) \text{ PER IL FATTORE } j2\pi f.$$

DATO IL LEGAME DI TRASFORMAZIONE E ANTITRASFORMAZIONE SIA  $x(t)$  IL SEGNALE OTTENUTO DERIVANDO IL SEGNALE  $x(t)$ .

LA DERIVATA DI UN SEGNALE HA COME TRASFORMATA IL PRODOTTO DELLA TRASFORMATA DEL SEGNALE

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad Y(f) = (2j\pi f)^2 X(f)$$

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \quad Y(f) = (2j\pi f)^n X(f)$$

## Antitrasformata della derivata di uno spettro

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$Y(f) = \frac{d}{df} X(f)$$

$$-j2\pi t x(t) \Leftrightarrow dX(f)/df$$

$$y(t) = -2j\pi t x(t)$$

$$t x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{-j2\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

↑  
nuova fips  
di segnale

$$X(f) \Leftrightarrow x(t)$$

$$Y(f) = \frac{d^2}{df^2} X(f)$$

$$y(t) = (-2j\pi t)^2 x(t)$$

$$Y(f) = \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

$$y(t) = (-2j\pi t)^n x(t)$$

$$t^n x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

Si deriva un segnale, quindi si ottiene uno spettro con derivata della funzione originale.

Alla spettro si deriva la funzione originale per ottenere un segnale con derivata della funzione originale. Si ottiene un segnale con derivata della funzione originale.

L'espressione riportata a lato può essere usata per avere una chiave molto semplice per trovare la trasformata di un segnale che si può mettere sotto forma di un prodotto fra la variabile  $t$  e un segnale  $x(t)$ .

# Trasformata dell'integrale di un segnale

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$$

derivando entrambi i membri rispetto al tempo  $t$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

$$2j\pi f Y(f) = X(f)$$

da cui

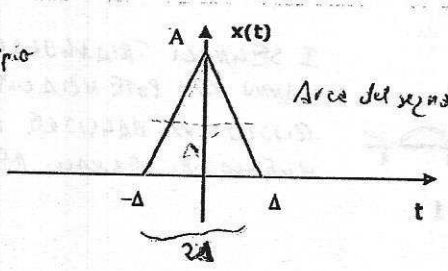
$$Y(f) = \frac{1}{2j\pi f} X(f)$$

solo se  $y(t)$  è trasformabile

vd. nota 4, relativa ad un segnale rettangolare.

Viene dimostrato come l'espressione  $Y(f) = \frac{1}{2j\pi f} X(f)$  non ha validità generale, in quanto l'integrale del segnale rettangolare diverge, dunque non è trasformabile.

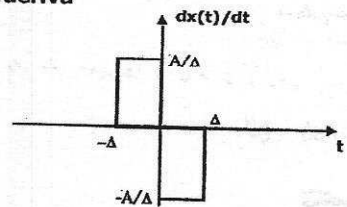
Esempio



Area del segnale  $A \cdot \Delta$

La durata  $\Delta$  del segnale è data, per convenzione, dai punti al 50% del massimo.

Si deriva



$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{A}{\Delta} \{ \text{rect}_{\Delta}(t + \Delta/2) - \text{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) \}$$

rettangolo di ampiezza  $\Delta$  centrato in  $-\frac{\Delta}{2}$

Linea del segnale rettangolare

Trasformata delle derivate

$$D_x(f) = A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{j\pi f \Delta} - A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} =$$

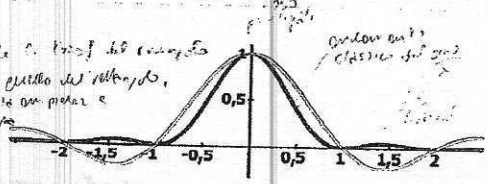
$$= A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \{e^{j\pi f \Delta} - e^{-j\pi f \Delta}\} =$$

$$= 2jA \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \sin(\pi f \Delta)$$

Trasformata del segnale rettangolare si deriva

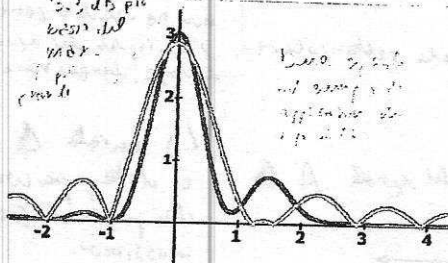
$$X(f) = \frac{2jA \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \sin(\pi f \Delta)}{2j\pi f} = A \Delta \operatorname{sinc}^2(\pi f \Delta)$$

In verde il grafico del segnale  
che ha stessa ampiezza e  
stessa durata



PSR = 13,3 dB      PSR = 26,5 dB

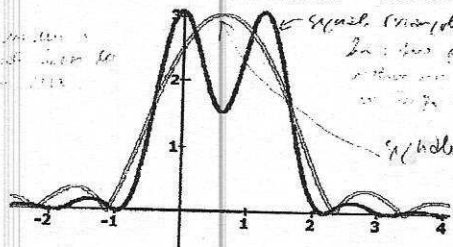
il segnale è  
3,3 dB più  
basso del  
max.



$A_2 = A_1 - 14 \text{ dB}$        $\Delta = 1$   
 $f_d = 1,5$

Linea doppia che indica il segnale e il suo spettro

Il segnale rettangolare  
ha la stessa durata  
ma è più alto



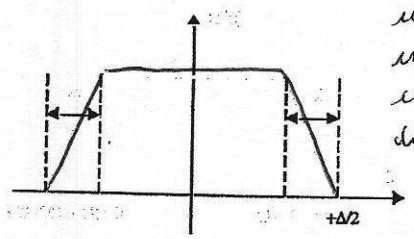
$A_2 = A_1 = 3$        $\Delta = 1$   
 $f_d = 1,2$

La trasformata di un rettangolo, di  
durata  $\Delta$  è presa come distanza dei  
punti al 50% del massimo, per convenzione  
è data dall'area  $A\Delta$ , per  $(\frac{\sin x}{x})^2$   
si nota che il segnale rettangolare è  
quello rettangolare di durata  $\Delta$  e ampiezza  $A$   
che ha la stessa area  $A\Delta$  e ampiezza  $A$

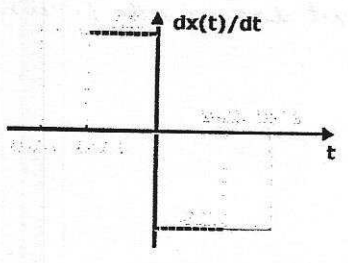
I SEGNALI TRIANGOLARI  
HANNO UNA POTENZA LUNGA  
RIDUCITIVA MAGGIORE DI  
QUELLA DEI SEGNALI RETTANGOLARI.

Il segnale rettangolare, a parità  
di durata e ampiezza del segnale  
rettangolare, permette  
migliori prestazioni in esame  
applicativo.

Un'altro esempio, per validare i modelli assunti. Si tratta di un segnale trapezoidale, che simula un segnale reale e non è più un impulso rettangolare, ma è un impulso con un tempo di salita e un tempo di discesa.



Si deriva

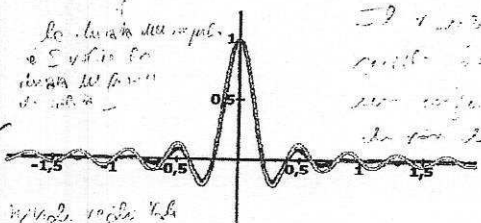


$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{A}{\Delta} \{ \text{rect}_{\Delta}(t + T) - \text{rect}_{\Delta}(t - T) \}$$

$$X(f) = \frac{2jA \text{sinc}(\pi f \Delta) \sin(2\pi f T)}{2j\pi f} = 2AT \text{sinc}(\pi f \Delta) \text{sinc}(2\pi f T)$$

Al numeratore il compimento della funzione rettangolare.

$$2T/\Delta = 5$$



Non segnale reale tale da essere più grande

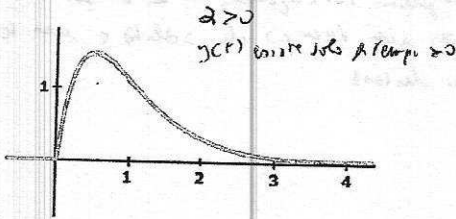
La derivazione e l'integrazione - 5 / 8 - Lezione 10

ottenuto dalla derivata dell'impulso rettangolare. In pratica otteniamo un segnale che è la derivata dell'impulso rettangolare.

Il risultato è un segnale che è la derivata dell'impulso rettangolare. In pratica otteniamo un segnale che è la derivata dell'impulso rettangolare.

Esempio. Dobbiamo trovare la Trasformata di Fourier del segnale dato.

$$y(t) = A t e^{-\alpha t} u(t)$$



$$A = 8 \quad \alpha = 2$$

valori piccoli di  $\alpha$  e  $\alpha$  che in generale si varia nel dominio della frequenza

$$t x(t) \Leftrightarrow -\frac{1}{j2\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

$$X(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$$

trasformata canonica

$$\begin{aligned} Y(f) &= -\frac{1}{j2\pi} \frac{d}{df} \frac{A}{\alpha + j2\pi f} = \\ &= \frac{1}{j2\pi} \frac{j2\pi A}{(\alpha + j2\pi f)^2} = \frac{A}{(\alpha + j2\pi f)^2} \end{aligned}$$

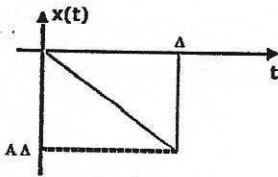


# Esempio

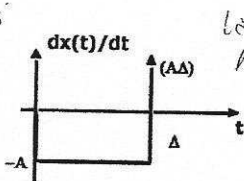
Warning!

La derivata non è sempre e la funzione ha una discontinuità in  $\Delta$  e la funzione non è continua.

$$y(t) = -At \operatorname{rect}_\Delta(t - \Delta/2)$$



La derivata di una discontinuità è un impulso.



La derivata di una discontinuità è un impulso.

Quando l'impulso ha un andamento lineare decrescente, la derivata è una costante, pari a  $-A$ .  
Nelle discontinuità esistono invece una derivata non pari al valore del salto. Dirac

$$D_x(f) = -A\Delta \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} + A\Delta e^{-2j\pi f \Delta}$$

$$X(f) = \frac{-A\Delta \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} + A\Delta e^{-2j\pi f \Delta}}{j2\pi f}$$

Il segnale derivato è la somma di un impulso rettangolare negativo e di ampiezza  $A$  e di un impulso di Dirac che si trova nella posizione  $t = \Delta$  dove finisce l'impulso, e che ha ampiezza pari al valore del salto ovvero  $A\Delta$ .

Dove ci sono discontinuità sono presenti impulsi di Dirac nella derivata.

Non si può l'impulso non si annulla, l'impulso non tornare a zero, ma si mantiene costante.

$X(f)$  è la trasformata del segnale, ottenuta dalla trasformata della derivata derivata  $j2\pi f$ .



Trasformata della derivata di un segnale  $\frac{d}{dt} x(t) \rightarrow j\omega X(\omega)$

Dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

↑ *per il teorema di derivata rispetto al tempo, l'unico è permesso essere l'esponente*

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

questo è primariamente una operazione di derivata, ma è il prodotto  $X(\omega) \cdot j\omega$ , quindi si ha l'ambiguità rispetto che  $X(\omega) \cdot j\omega$ , ovvero si ha che la derivata del segnale è l'ente trasformato di  $X(\omega) \cdot j\omega$ .

dimostrazione 2

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$

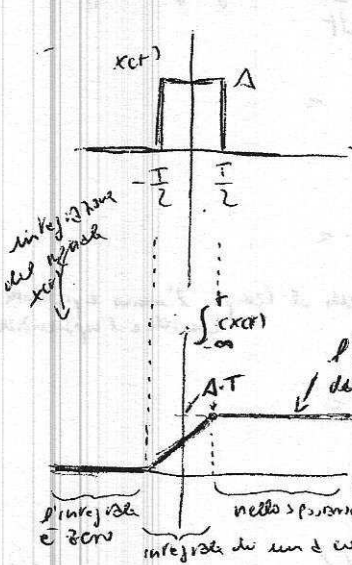
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -j t x(t) e^{-j\omega t} dt$$

~~~~~

11:00  
 da 13:40 Per dimostrare che l'espressione delle trasformate di un segnale  
 viene sempre meno un segnale di un segnale  
 un segnale di un segnale non ha valore costante



$$X(f) = A T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

$$\updownarrow$$

$$x(t) = A \operatorname{rect}_T(t)$$

La trasformata, usata del segnale  $x(t)$ , usata  $x(t) = A \operatorname{rect}_T(t)$

Si integra il segnale  $x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

l'integrale non cambia più, in quanto l'area del segnale non cambia. Rimane costante al valore  $A \cdot T$ , per  $t \rightarrow \infty$ .  
 l'area del segnale non cambia, dunque l'integrale ha un valore costante. Rimane costante al valore  $A \cdot T$ , per  $t \rightarrow \infty$ .  
 l'area del segnale non cambia, dunque l'integrale ha un valore costante. Rimane costante al valore  $A \cdot T$ , per  $t \rightarrow \infty$ .

La condizione di Dirichlet è  $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty$ , che non è soddisfatta

in quanto l'integrale diverge  $\Rightarrow$  non è trasformabile secondo Fourier.

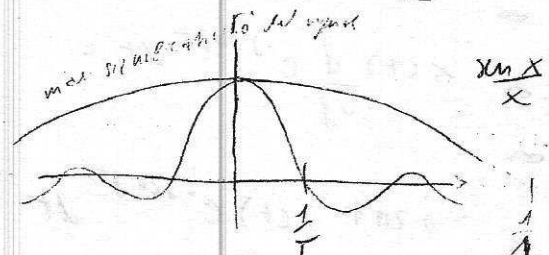
2:43 Analisi

La trasformata di un trapezoido è:

$$A T \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \cdot \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

$\leftarrow$  presente al punto zero  $\quad \leftarrow$  presente al punto zero  
 $\frac{1}{\Delta} \quad \quad \quad \frac{1}{T}$

Se  $\Delta \ll T \Rightarrow \frac{1}{T} \ll \frac{1}{\Delta}$  e questo significa che:



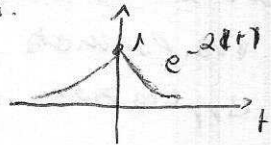
e quando  $\operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \approx 1$ , per cui lo spettro risultante è uguale a quello con l'inviluppo rettangolare di durata  $T$ .

# LEZ. 11 - ALCUNE TRASFORMATE PARTICOLARI

## • La Trasformata di Fourier della costante

VIENE CALCOLATA ATTRAVERSO UN LIMITE IN QUANTO LA COSTANTE NON È UN SEGNALE TRASFORMABILE; IL SUO INTEGRALE DA  $-\infty$  A  $+\infty$  DIVERGE, QUINDI NON È VERIFICATA LA CONDIZIONE DI DIRICHLET PER CUI  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty$ . ESISTE, LA COSTANTE, È UN SEGNALE DI INTERESSE, IN QUANTO È, AD ESEMPLO, L'USCITA DI UNA BATTERIA.

Poiché  $1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|}$



allora  $F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \mathcal{F}\{f\}$

$\downarrow$   
 Trsf.  
 di Fourier

Impulsi la funzione  $\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$  ha l'integrale che non diverge ed è pari a 1 per  $(-\infty, \infty)$ ; per valori sempre più piccoli di  $\alpha$  avremo curve con un picco sempre più grande e sempre più stretto e, al limite, avremo l'impulso di Dirac. Dunque LA TRASFORMATA DELLA COSTANTE È L'IMPULSO DI DIRAC

$$1 \longleftrightarrow \mathcal{F}\{f\}$$

Da ciò ne consegue che

$$1 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \mathcal{F}\{f - f_0\}$$

ed un esponenziale puro con esponente immaginario puro corrisponde, per la trasformata in freq., ad un impulso di Dirac intorno a  $f_0$ .

$$A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2} \mathcal{F}\{f - f_0\} + \frac{A}{2} \mathcal{F}\{f + f_0\}$$

$$A \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow -j \frac{A}{2} \mathcal{F}\{f - f_0\} + j \frac{A}{2} \mathcal{F}\{f + f_0\}$$

Le trasformate di un coseno e di un seno sono una coppia di impulsi di Dirac, uno centrato sulla frequenza  $f_0$  e l'altro sulla frequenza  $-f_0$ .

La differenza tra coseno e seno sta in una impedenza di fase differente:

0 per il coseno,  $\pm \frac{\pi}{2}$  per il seno.

La trasformata del coseno e del seno è calcolata in duplicazione delle formule di Eulero, per cui

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

e perché vale la relazione

$e^{j2\pi f_0 t}$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{L}(f - f_0)$
$e^{j2\pi(-f_0)t}$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{L}(f + f_0)$

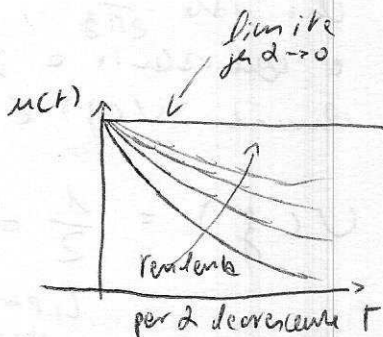
- La Trasformata di Fourier del gradino unitario, che non è trasformabile secondo Fourier, così come non lo è la costante.

$x(t) = u(t)$  è il segnale di un determinato la Trasformata di Fourier, cioè il gradino unitario, che ha valore 1 per  $t \geq 0$ , 0 altrove.

Per calcolare la Trasformata di Fourier del gradino unitario si definisce gradino unitario  $u(t)$  come

$$u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} u(t)$$

Questo perché per  $\alpha$  che decresce la funzione  $e^{-\alpha t}$  tende al gradino unitario



Dunque la T.d.F.,  $U(f)$  è calcolabile come

$$U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

quantità necessaria mente complessa in quanto il segnale non è né pari, né dispari.

Tale quantità può essere decomposta in parte reale e parte immaginaria:

$$U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$\frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \frac{1}{2} \delta(f)$

$\frac{1}{2\pi f}$  valore del limite

$$\text{Dunque } U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{2^2 + (2\alpha f)^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha f}{2^2 + (2\alpha f)^2}$$

parte reale
parte imag.

La parte reale è un limite conosciuto, nel calcolo della T.L.F. della costante, se con

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{2^2 + (2\alpha f)^2} = S(f);$$

La parte immaginaria è un limite immediato, che vale  $\frac{1}{2\pi f}$ , con  $-j$  al numeratore che è equivalente a  $j$  al denominatore.

Quindi  $U(f)$  è pari a

$$U(f) = \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

$\hookrightarrow$  parte reale, impulso di D.A.C. di ampiezza  $1/2$ , corrispondente alla parte pari  
 $\hookrightarrow$  parte immaginaria, corrisponde alla parte pari

Allora abbiamo

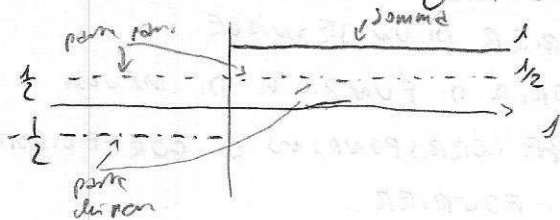
$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

Si noti che, "graficamente", in frequenza, la parte pari, essendo un impulso di D.A.C. di ampiezza  $1/2$ , è una costante pari a  $1/2$ , lungo tutto l'asse della frequenza, la parte dispari è un gradino che vale



$-\frac{1}{2}$  per frequenze negative e vale  $+\frac{1}{2}$  per frequenze positive.

La somma di queste due parti è 1, per



frequenze positive,

0 per frequenze negative.

È importante notare come la parte pari possa essere scritta come funzione del tempo

$$\frac{1}{2} \text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2j\pi f}$$

$\begin{matrix} 1 \text{ per } t > 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{matrix}$

Se non possiamo rivedere un'altra trasformata limite

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

La funzione  $\frac{1}{j\pi f}$  non va a

infinito, ma va a 0,

per  $f \rightarrow 0$ . È sia

vale 0 per  $f = 0$

in quanto tutte le funzioni che lo generano valgono 0 nell'origine.

# • La Trasformata di Fourier di Segnali periodici

LA TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO È UNA SOMMATORIA DI FUNZIONI DI IMPULSI DI DIRAC, LE CUI AMPIEZZE CORRISPONDONO AI COEFFICIENTI COMPLESSI DELLA SERIE DI FOURIER.

Un segnale periodico  $x(t)$  con periodo  $T$  è sviluppabile in serie di Fourier come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficienti}}}{y_k} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad \left( \text{da } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t-kT) \right)$$

$\uparrow$  esponenziale di freq.  $\frac{k}{T}$

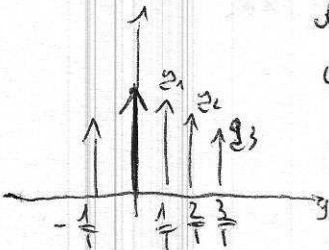
che può essere espresso come somma di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportune, e da queste, per mezzo della formula di Eulero)

Poiché l'esponenziale corrisponde <sup>come trasformata</sup> ad un impulso di Dirac piazzato in  $k/T$ , abbiamo che la Trasformata di Fourier

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

si ottiene tale risultato se aver lavorato in senso limite

Quindi per un segnale periodico abbiamo tante componenti di Fourier, piazzate a  $1/T, 2/T$  ecc, che sono impulsi di Dirac. L'area di ognuno di questi è esattamente il coefficiente  $y_k$  dello sviluppo in serie di Fourier



Ricordando, dalla Lez. 6, lo sviluppo in serie bilaterale di Fourier che il segnale

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t / T) + b_k \sin(2\pi k t / T)$$

può essere espresso come segue, considerando la

formule di Eulero per il seno e il coseno:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k t / T}$$

in cui  $X_k = C_k = \frac{a_k - j b_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$

per  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Inoltre lo spettro di ampiezza bilaterale è

$$|C_k| = \frac{\sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}}{2}$$

E lo spettro di fase bilaterale è

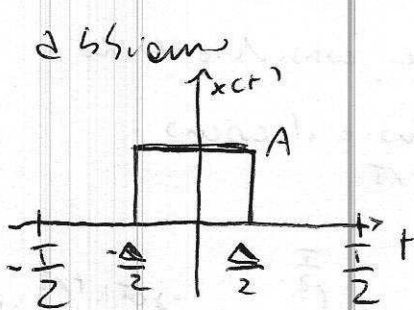
$$\Phi_k = -\arg(C_k) = \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier di un impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $\Delta$ , inserito in un intervallo di larghezza  $T$  si risolve dunque nel calcolo

dei coefficienti  $C_k$ , data dalla relazione

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$$

Di seguito, nel caso di un impulso rettangolare di Ampiezza  $A$ , durata  $\Delta$ , in un intervallo di lunghezza  $T$ ,



$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$$

Nel nostro caso si considera l'intervallo in cui  $x(t)$  ha valore costante, pari ad  $A$ , ovvero l'intervallo  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ .

Di conseguenza

$$c_k = \frac{A}{T} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-j2\pi k t / T} dt$$

$$c_k = \frac{A}{\pi k} \sin(\pi k \Delta / T) = \frac{A \Delta}{T} \text{sinc}(\pi k \Delta / T), \text{ dove } \text{sinc}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{x};$$

# CONSIDERAZIONI SULLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI UN IMPULSO RETTANGOLARE

I coefficienti  $c_k$  sono

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi kt} dt$$

che si semplifica in quanto l'integrale si estende all'intervallo  $-\Delta/2, \Delta/2$  in cui il segnale ha ampiezza costante e pari a  $A$ .

$$c_k = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-j2\pi kt} dt = \frac{2A}{T} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

L'argomento dell'integrale  $e^{-j\omega t}$  viene sviluppato secondo Eulero come  $\cos \dots - j \sin \dots$ ;

il coseno è una funzione pari, il seno è una funzione dispari  $\Rightarrow$  il seno avrà l'integrale pari a 0 nell'intervallo considerato.

Il risultato dell'integrale è:

$$c_k = \frac{A}{T} \sin \frac{\pi k \Delta}{T} = \frac{A \Delta}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi k \Delta}{T} \right)$$

a seguito di alcune manipolazioni con l'introduzione della funzione SINC, molto importante nelle telecomunicazioni.

CHAPTER 10: THE INTEGRAL CALCULUS  
 SECTION 10.1: ANTIDERIVATIVES

I want to find the antiderivative of

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

I know that the derivative of  $x^{-1}$  is  $-x^{-2}$ . So, if I multiply  $x^{-1}$  by  $-1$ , I get  $-x^{-2}$ . This means that the derivative of  $-x^{-1}$  is  $x^{-2}$ .

$$\frac{d}{dx} (-x^{-1}) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Therefore, the antiderivative of  $\frac{1}{x^2}$  is  $-x^{-1} + C$ , where  $C$  is an arbitrary constant.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

The constant  $C$  is called the constant of integration.

# Esempio di segnale periodico

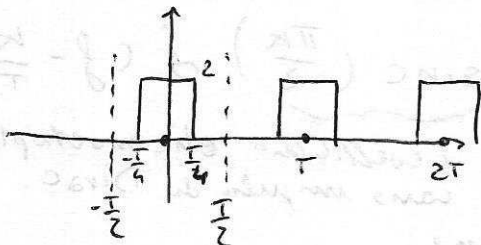
DA NON CONFONDERSI CON UN SEGNALE PULSATO IN QUANTO SI INCORREREBBE IN UN GRAVE ERRORE NEL CALCOLO DELLA TRASFORMATA

$$x(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\frac{T}{2}}(t - kT)$$

Ampiezza  
impulsi  
rettilineari

Il segnale è periodico ed è formato da onde quadre. Ogni onda quadra ha ampiezza 2, e un impulso di durata  $T/2$ , periodo  $T$ .

Per  $k=0$  si ha un impulso di ampiezza 2, che va da  $-T/4$  a  $T/4$  e poi si sviluppa periodicamente (e simmetricamente nel tempo negativo) di periodo  $T$ .



Si determina dunque l'espressione dei coefficienti dello sviluppo in serie di un impulso rettangolare, quello in un periodo, da es.  $-T/2, T/2$ .

Il rettangolo ha durata  $\Delta = T/2$ , Area  $= T/2 \cdot 2 = T$ , ampiezza  $A = 2$ : applicando

$$c_k = \frac{A \Delta}{T} \text{sinc}(\pi k \Delta / T) \Rightarrow c_k = 2 \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\pi k \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{T}\right)$$

svd. il relativo calcolo

per cui i coefficienti sono

$$c_k = \text{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Quindi  $x(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{1/2}(t - kT) e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$  è esprimibile come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)}_{\text{i coefficienti}} e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

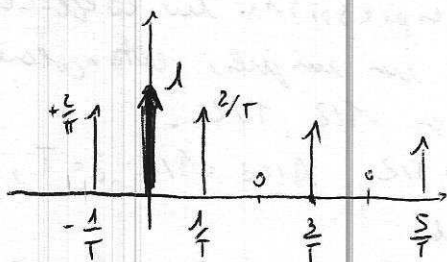
segnale  $x(t)$  espresso come sviluppo in serie di Fourier. Inoltre

È dunque ricordabile la trasformata di Fourier  $\bar{X}(f)$  del segnale  $x(t)$ , ed è:

$$\bar{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)}_{\text{i coefficienti}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

i coefficienti che moltiplicano i impulsi di Dirac.

Graficamente abbiamo:



una componente per  $k=0$ , con un Dirac di area unitaria nell'origine. Per  $k=1$ , alla frequenza  $1/T$  abbiamo  $\text{sinc}\frac{\pi}{2} = 1/\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$ . Per  $k=2$ , alla frequenza  $2/T$  abbiamo 0.

Avere un impulso di Dirac nell'origine, di area valore 1, significa una componente costante nel segnale, pari a 1.



Esempio di segnale somma di un segnale periodico e di un segnale impulsivo.

Calcolare la T. di Fourier del segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + 2 e^{-2t} u(t)$$

Solo il segnale impulsivo è trasformabile, infatti  $2 e^{-2t} u(t)$  è un segnale di energia impulsivo e quindi trasformabile  $\Rightarrow$  trasformata "vera".

Il segnale cosinusoidale è di potenza e quindi non trasformabile, se non utilizzando la trasformata limite.

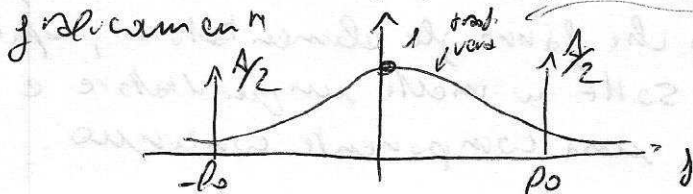
La somma dei due segnali non è trasformabile, ma si ottiene come somma di una trasformazione limite con una trasformazione vera.

Quindi otteniamo che  $\underline{X}(f)$  è:

$$\underline{X}(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{2}{2 + j2\pi f}$$

Il modulo,  $|\underline{X}(f)|$  è:

$$|\underline{X}(f)| = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{2}{\sqrt{2^2 + (2\pi f)^2}}$$



Esempio di una situazione non lineare,  
di cui colleghiamo la Trasformata di Fourier

$$y = x^2, \quad x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Abbiamo dunque

$$y(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)$$

Applicando Euler abbiamo

$$y(t) = \frac{A^2}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\phi)]$$

Il quadrato ha prodotto una costante, 1, e un coseno alla frequenza  $2f_0$ , con fase  $2\phi$ .

La trasformata che otteniamo all'uscita è:

$$Y(f) = \frac{A^2}{4} [ \delta(f) + e^{j2\phi} \delta(f - f_0) + e^{-j2\phi} \delta(f + f_0) ]$$

L'uscita

La trasformata all'ingresso è:

$$X(f) = \frac{A}{2} [ e^{j\phi} \delta(f - f_0) + e^{-j\phi} \delta(f + f_0) ]$$

Dunque la non linearità può essere usata  
o per duplicare la frequenza, o per creare presso  
una componente continua da una sinusoide,  
che è quello che fanno gli elementatori, infatti  
sulle rete a volte si mette un quadratore e  
lo questo ha una componente continua.

Esempio con 2 sinusoidi, una di ampiezza  $A_1$  e frequenza  $f_1$ , l'altra con ampiezza  $A_2$  e frequenza  $f_2$

$$y = x^2$$

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Abbiamo dunque

$$y(t) = A_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \phi_2) + 2 A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \cdot A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Ricordando la formula

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , per cui, nel uguale  $y(t)$ ,  
 1/2 è la componente continua  
 e che il  $\cos 2x$  porterà una  
 componente a frequenza  $2f_1$   
 e una componente a frequenza  
 $2f_2$ , quindi due componenti  
 con frequenze raddoppiate

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ , per cui  
 nel relativo termine avremo un  
 coseno della somma delle frequenze  
 $f_1$  e  $f_2$  e un coseno della differenza,  
 che sono i cosiddetti prodotti di intermodulazione

IN SOSTANZA, MANDANDO LE DUE SINUSOIDI ALL'INGRESSO DI UN  
 DISPOSITIVO QUADRATORE, SI AVRA' UNA COMPONENTE CONTINUA,  
 UNA FREQUENZA DOPPIA Sia di  $f_1$  CHE DI  $f_2$ , UNA FREQUENZA  
 SOMMA  $f_1 + f_2$  E UNA FREQUENZA DIFFERENZA  $f_1 - f_2$ . CON OPPORTUM  
 FILTRI SARAN' POSSIBILE ISOLARE QUALI SIA LE DUE FREQUENZE.

È esempio rappresentativo di un amplificatore di guadagno  $G$  con una distorsione, ovvero una non linearità di tipo quadratico.

$$y = Gx + ax^2 \quad , \quad ax^2 \text{ è una distorsione di } \mathbb{P}^{\circ} \text{ ordine, quadratico.}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

per cui l'uscita è:

$$y(t) = GA \cos(2\pi f_0 t + \phi) + aA^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)$$

e, applicando la formula di  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , abbiamo

$$y(t) = GA \cos(2\pi f_0 t + \phi) + \frac{aA^2}{2} [1 + \cos(2\pi \cdot 2f_0 t + 2\phi)]$$

In cui  $GA$  rappresenta il guadagno all'uscita della sinusoide in ingresso,  $x(t)$ , così come è richiesto da un amplificatore. Ci sono però delle componenti indesiderate, cioè c'è una componente continua e una componente a frequenza doppia.

Dal punto di vista spettrale abbiamo, calcolando la trasformata di Fourier del segnale di uscita,  $Y(f)$ :

$$Y(f) = \frac{GA}{2} [e^{j\phi} \delta(f - f_0) + e^{-j\phi} \delta(f + f_0)] + \frac{aA^2}{2} \delta(f) + \frac{aA^2}{4} [e^{j2\phi} \delta(f - 2f_0) + e^{-j2\phi} \delta(f + 2f_0)]$$

in cui il  $\delta(f)$  con  $\pm 2f_0$  sono le componenti a frequenza doppia.

# TEOREMA DI PARSEVAL per segnali trasformabili

Per il Teorema di Parseval, l'energia  $E_x$  di un segnale  $x(t)$  è calcolabile, indifferente, nel dominio del tempo o nel dominio delle frequenze, in quanto vale la relazione seguente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

$x(t)$  è un segnale di energia e quindi trasformabile secondo Fourier

Dimostrazione:

Dati due segnali di energia e quindi trasformabili, il loro prodotto scalare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt$$

riscriviamo la  $y(t)$  sotto forma di serie trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{+j2\pi f t} df \right] dt$$

perché  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{-j2\pi f t} df$  e essendo

Se si sviluppa prima l'integrazione in tempo e poi quella in frequenza, si riscontra

il tutto mettendo internamente l'integrale in tempo ed esternamente l'integrale in frequenza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{+j\omega t} dt d\omega$$

in tempo =  $X^*(\omega)$

in freq.

Ma l'integrale in tempo è  $X^*(\omega)$ ,  
 quindi abbiamo l'equivalenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega$$

prod. scalare in tempo

Se i due segnali sono uguali, abbiamo la relazione del Teorema di Parseval, con i due integrali che rappresentano l'energia del segnale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = E_x$$

## LEZ. 12 - LA CONVOLUZIONE

La convoluzione è un caso particolare del prodotto scalare: è il prodotto scalare fra un segnale e un altro segnale con l'asse dei tempi invertito e ritardato.

La convoluzione è definita come

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

, che diventa, con l'operazione di fare il prodotto scalare

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x^*(\tau)]^* y(t-\tau) d\tau$$

Si arriva alle formule più interessanti, della convoluzione, che risulta essere

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi ft} df$$

, ovvero una  
trasformata  
di Fourier,  
considerando che:

$$x^*(\tau) \leftrightarrow X^*(-f)$$

$$s(\tau) \leftrightarrow S(-f)$$

$$y(t-\tau) \leftrightarrow Y(f) e^{-j2\pi ft}$$

Per cui la convoluzione corrisponde a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(c-\varphi) Y(c-\varphi) e^{-j2\pi\varphi t} d\varphi$$

in cui  $\varphi$  è la variabile di integrazione

ponendo  $f = -\varphi$  abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(cf) Y(cf) e^{j2\pi f t} df$$

le formula della convoluzione, di maggior interesse.

Diunque, la convoluzione tra due segnali, corrisponde nel dominio delle frequenze, al prodotto delle trasformate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(cf) Y(cf) e^{j2\pi f t} df$$

Proprietà: La convoluzione è indicata con \*

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow \bar{X}(f) Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \bar{X}(f) * Y(f)$$

$$x^2(t) \leftrightarrow \bar{X}(f) * \bar{X}(f)$$

$$|x(t)|^2 \leftrightarrow$$

$$\bar{X}(f) * \bar{X}^*(-f)$$

Il quadrato di un segnale è un segnale con spettro più largo

prodotto del segnale per se stesso convulso

spettro del segnale, pari alle T. di F.

spettro convulso, con 2x di frequenze invertite.



# • LA CONVOLUZIONE

È un caso particolare di prodotto scalare; è il prodotto scalare fra un segnale e un altro con l'asse dei tempi invertito e ritardato

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [x^*(\tau)]^* y(t-\tau) d\tau$$

La convoluzione tra due segnali corrisponde, nel dominio delle frequenze, al prodotto delle trasformate, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi f t} df$$

Proprietà convoluzione

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f) Y(f)$$

$$x(t) y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$x^2(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f)$$

$$|x(t)|^2 \longleftrightarrow X(f) * X^*(-f)$$

↳ prodotto del segnale per il suo stesso coniugato

↳ spettro del segnale, la trasformata di Fourier

↳ spettro coniugato, con l'asse delle frequenze invertito.

• CONVOLUZIONE E RITARDO

$$x(t) = v(t - t_v) \leftrightarrow X(f) = V(f) e^{-j2\pi f t_v}$$

$$y(t) = w(t - t_w) \leftrightarrow Y(f) = W(f) e^{-j2\pi f t_w}$$

$$\begin{aligned} X(t) * y(t) &\leftrightarrow X(f) Y(f) = \\ &= V(f) W(f) e^{-j2\pi f (t_v + t_w)} \end{aligned}$$

## Esempio di convoluzione

$$x(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$$

$$y(t) = B e^{-\beta t} u(t)$$

Da due segnali calcoliamo lo T. di Fourier e ne prendiamo il prodotto. Fatto il prodotto occorrerà infatti trasformare per stabilire l'andamento nel tempo.

$$X(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} \quad \text{e} \quad Y(j\omega) = \frac{B}{\beta + j2\pi f}$$

Per cui

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow \frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)}$$

Per ottenere una somma si esegue una scomposizione in frazioni parziali:

$$\frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)} = \frac{k}{\alpha + j2\pi f} + \frac{h}{\beta + j2\pi f}$$

da cui si ricava  $k = -h = \frac{AB}{\beta - \alpha}$ , per cui abbiamo

$$\frac{AB}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{AB}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{\beta + j2\pi f} \quad \text{e quindi}$$

$$x(t) + y(t) = \frac{AB}{\beta - \alpha} \left( \frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{1}{\beta + j2\pi f} \right) = \frac{AB}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$$

remmi asahnt

Ergebnis der Untersuchung

$$X(t) = A e^{-\lambda t} + B e^{\lambda t}$$

$$Y(t) = C e^{-\lambda t} + D e^{\lambda t}$$

Die beiden Systeme sind durch die Gleichungen  $X'' + \omega^2 X = 0$  und  $Y'' + \omega^2 Y = 0$  beschrieben. Die allgemeine Lösung für  $X(t)$  ist  $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . Die allgemeine Lösung für  $Y(t)$  ist  $Y(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$ .

$$X(t) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$X(t) + Y(t) = \frac{A+C}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{B+D}{\omega} \cos(\omega t)$$

Die Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem lautet  $Z'' + \omega^2 Z = 0$ . Die allgemeine Lösung ist  $Z(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)$ .

$$Z(t) = \frac{A+C}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{B+D}{\omega} \cos(\omega t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)$$

Die Anfangsbedingungen sind  $Z(0) = Z_0$  und  $Z'(0) = \dot{Z}_0$ . Daraus folgt  $E = Z_0$  und  $F = \frac{\dot{Z}_0}{\omega}$ .

$$Z(t) = Z_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{Z}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$X(t) = \frac{1}{2} Z(t) + \frac{1}{2} Y(t) = \frac{1}{2} Z_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \frac{\dot{Z}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{2} Y(t)$$

Lezione n. 12

IL TEOREMA DI PARSEVAL

Prof. Tullio Bucciarelli  
40'03"

- Il Teorema di Parseval per segnali trasformabili
- Trasformata della convoluzione

IL PRODOTTO SCALARE

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t) dt$$

*la (1) nella forma di  
di Fourier*

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)e^{j2\pi ft} df dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft} dt df$$

*questo è il  
per il  
di Fourier*

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) X^*(f) df$$

Definizione per uguale di energia e  
quando uguale trasformabili.  
 $x^*(t)$  è il segnale coniugato, che non è  
uno operatore nel caso dei segnali reali.

Da questa derivando la seguente relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)Y(f) df$$

che attesta che il prodotto scalare è  
una operazione possibile sia nel  
dominio del tempo, sia nel dominio  
della frequenza.

$x(t) = y(t)$ , e in un caso particolare così otteniamo il  
segnale suo lo stesso segnale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

I due integrali rappresentano l'energia  
del segnale. Il risultato è come  
della normalizzazione

Il segnale è il  
messaggio e  
il risultato è  
quello dato dal segnale

risultato di normalizzazione  
della energia  
del segnale

Il Teorema di Parseval rappresenta  
l'invarianza nel dominio del tempo  
e della frequenza del calcolo del  
prodotto scalare tra due segnali.  
Nel caso di due segnali uguali esso si

La verità alla base dell'energia è che  
quando il prodotto scalare è 0 → ortogonalità

induce alle relazioni  
dell'energia, poiché lo si  
in tempo che in frequenza

### La convoluzione

è un caso particolare di prodotto scalare

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x^*(\tau)]^* y(t - \tau) d\tau$$

Esiste il prodotto scalare per una segnale e un altro con l'assi dei tempi invertito e invertito

trasformata di un segnale con l'assi dei tempi invertito

$$x^*(\tau) \Leftrightarrow X^*(-f) \quad s(-\tau) \Leftrightarrow S(-f)$$

$$y(t - \tau) \Leftrightarrow Y(-f) e^{-j2\pi ft}$$

La convoluzione corrisponde a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(-\varphi) Y(-\varphi) e^{-j2\pi m\varphi} d\varphi$$

$$f = -\varphi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi ft} df$$

Formula della convoluzione, di maggior interesse. È, in sostanza, una analogia-unità di Fourier.

La convoluzione fra due segnali corrisponde nel dominio della frequenza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi ft} df$$

al prodotto delle trasformate.

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f) Y(f)$$

$$x(t) y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$x^2(t) \Leftrightarrow X(f) * X(f)$$

$$|x(t)|^2 \Leftrightarrow X(f) * X^*(-f)$$

È il prodotto del segnale e il suo complesso coniugato

Spettro complesso del segnale e il suo complesso coniugato

→ al suo prodotto nel tempo con il prodotto delle trasformate

→ il quadrato di un segnale è il suo spettro convolto con il suo spettro. Se il segnale è reale, il suo spettro è reale e si può dare un'interpretazione in termini di potenza.

Il quadrato di un segnale è il suo spettro convolto con il suo spettro complesso coniugato.

## Calcolo della convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi ft} df$$

Questa equazione si può ottenere nel dominio della frequenza.

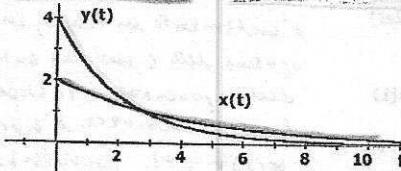
→ Nel dominio del tempo, confrontabile con quello che possiamo fare con

→ Nel dominio della frequenza

### Un esempio di convoluzione

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$$

$$y(t) = Be^{-\beta t} u(t)$$



$$A=2; \alpha = 0,25 \text{ s}^{-1}; B=4; \beta = 0,5 \text{ s}^{-1}$$

$\frac{1}{\tau} \rightarrow$  costante di smorzamento

I due segnali, entrambi esponenziali.

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$$

$$y(t) = Be^{-\beta t} u(t)$$

$$X(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{B}{\beta + j2\pi f}$$

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow \frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)}$$

Alle convoluzione dei due segnali compilate il prodotto delle trasformate

Nota questa due segnali, occorre calcolare le due trasformate  $X(f)$  e  $Y(f)$ . Il prodotto delle due trasformate è la trasformata di Fourier della convoluzione. Per calcolare la convoluzione si può usare calcolatore  $\int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi ft} df$ ,

ovvero l'antitrasformata del prodotto.

È facile la calcolare in frequenza se si trasforma le due trasformate e si calcola i due punti cruciali.

Questo è la trasformata della convoluzione.

Dobbiamo ora trasformare questa espressione per stabilire l'andamento in tempo del segnale.

Quello che si ottiene è una soluzione in forma parziale, come da esempio riportato  
 Si tratta di questa addendo e il denominatore da  
 un termine esponenziale, il  
 costante di smorzamento  $\alpha$   
 e  $\beta$

$$\frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)} = \frac{k}{\alpha + j2\pi f} + \frac{h}{\beta + j2\pi f}$$

$$\frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)} = \frac{k(\beta + j2\pi f) + h(\alpha + j2\pi f)}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)}$$

$$k\beta + h\alpha = AB$$

$$k + h = 0$$

$$k(\beta - \alpha) = AB$$

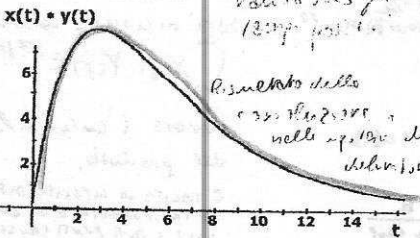
$$k = -h = \frac{AB}{\beta - \alpha}$$

$$\frac{AB}{(\alpha + j2\pi f)(\beta + j2\pi f)} = \frac{AB}{(\beta - \alpha)(\alpha + j2\pi f)} - \frac{AB}{(\beta - \alpha)(\beta + j2\pi f)}$$

$$x(t) * y(t) = \frac{AB}{(\beta - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$$

per questo valore  
 l'operazione è  
 valida solo per  
 $t > 0$

due linee addendo ne costruiamo  
 l'andamento in tempo, infatti  
 otteniamo delle 2 soluzioni anti trasformate  
 dell'esponenziale. Possiamo  
 dunque scrivere l'espressione  
 $x(t) * y(t)$ , convoluzione  
 tra  $x$  e  $y$ .



$$A=2; \alpha = 0,25s^{-1}; B=4; \beta = 0,5s^{-1}$$



Un caso particolare, quando  $x$  e  $y$  sono uguali.

**Un caso particolare**

$$x(t) = y(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$$

$$X(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$$

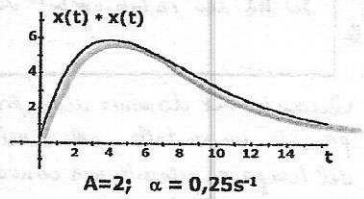
$$x(t) * x(t) \Leftrightarrow \frac{A^2}{(\alpha + j2\pi f)^2}$$

Trasf. di F. delle convoluzioni, la derivata / integrale

Si ottiene l'espressione quando, in quanto derivare in frequenza uno spettro significa moltiplicare per  $-j2\pi f$  nel tempo il segnale

$$x(t) * x(t) \Leftrightarrow \frac{A^2}{-j2\pi} \frac{d}{df} \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

$$x(t) * x(t) = A^2 te^{-\alpha t} u(t) \quad \text{e questa è l'autoconvoluzione del segnale}$$



Qual'ultimo interessante caso può essere risultato è una sinfonia fisica da un certo interesse

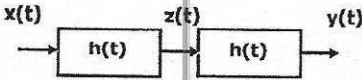
In un'altra occasione si è visto come la risposta impulsiva di un filtro RC passa-basso non sia altro che

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad RC \text{ è la costante di tempo}$$

fare l'autoconvoluzione uguale considerare due filtri uguali (RC) messi in serie, in cascata

funzione di trasferimento  
caratteristico di un singolo filtro

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$



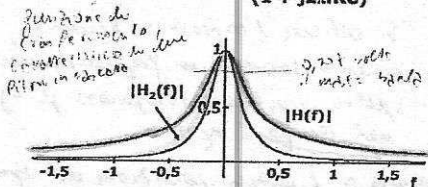
in termini di  
n. posti in pub. 12

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow z(t) = h(t) \Rightarrow y(t) = h(t) + h(t)$$

LA RISPOSTA IMPULSIVA ODELLA USATA  
DEI DUE FILTRI È LA CONVOLUZIONE  
DELLA RISPOSTA IMPULSIVA DEI SINGOLI  
FILTRAS PER SE STESSI.

LA COSA È A RIFERIRSI A QUESTO PER N. POSTI  
CON UNA CONVOLUZIONE N-RIMA.

$$H_2(f) = H^2(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi fRC)^2}$$



funzione di  
trasferimento  
costituito da due  
filtri in cascata

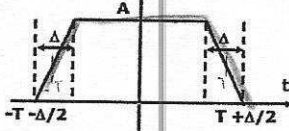
È interessante quello che accade  
nel dominio della frequenza

Il secondo filtro ha una banda  
più stretta, ma otteniamo un solo  
di più sulla banda.

Si ha un restringimento di banda

In questo ulteriore esempio, c'è più una  
interpretazione, piuttosto che un calcolo.

l'area  
dell'impulso,  
proprio della  
funzione di  
trasferenza  
costante, e  
molto più che



$$X(f) = 2AT \text{sinc}(\pi f \Delta) \text{sinc}(2\pi f T)$$

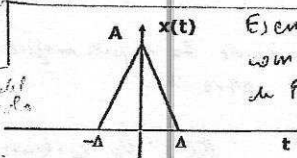
$$X(f) = \{A \text{sinc}(\pi f \Delta)\} \cdot \{2T \text{sinc}(2\pi f T)\}$$

$$x(t) = \frac{A}{\Delta} \text{rect}_\Delta(t) * \text{rect}_{2T}(t)$$

Quando nel dominio della frequenza c'  
è presente un prodotto, allora nel dominio  
del tempo è presente una convoluzione.  
Quindi X(f) può essere interpretata in  
modo tale, da ottenere una  
convoluzione.

qualche  
cosa da  
considerare  
e da  
comparare

area del  
triangolo



Esempio di  
come dalla T,  
di f, di un

una convoluzione di due segnali, uno un rettangolo di durata Δ, che rappresenta i due prodotti dell'impulso rettangolare, il secondo è il rettangolo che rappresenta il prodotto dei due rettangoli.

$$X(f) = A \Delta \text{sinc}^2(\pi f \Delta)$$

$$X(f) = \{A \Delta \text{sinc}(\pi f \Delta)\} \cdot \{\text{sinc}(\pi f \Delta)\}$$

$$x(t) = \frac{A}{\Delta} \text{rect}_\Delta(t) * \text{rect}_\Delta(t)$$

questo triangolo, si può dedurre  
una convoluzione di due  
segnali rettangolari.

## Convulsione e ritardo

$$x(t) = v(t - t_v) \Leftrightarrow X(f) = V(f)e^{-j2\pi f t_v}$$

$$y(t) = w(t - t_w) \Leftrightarrow Y(f) = W(f)e^{-j2\pi f t_w}$$

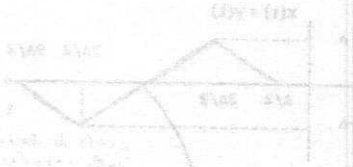
$$x(t) + y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f) = \\ = V(f)W(f)e^{-j2\pi f(t_v + t_w)}$$

Il segnale  $x(t)$  è ottenuto come ritardo di un segnale  $v(t)$ .  
Lo spettro del segnale ritardato è  $X(f)$ .  
Analogamente per un segnale  $y(t)$ .

La trasformata delle convulsione si ottiene come  
trasformata dei segnali non ritardati, e non deve essere  
applicato un ritardo che è la somma dei ritardi  
dei due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Questo si può evitare in un certo numero di casi  
perché significa che possiamo scegliere o vogliamo  
arbitrariamente l'origine del sistema di riferimento,  
in cui fare i calcoli, e poi applicare il risultato  
la somma dei due ritardi.

In un segnale posso un ritardo e uno in anticipo, o  
sare stero delle differenze, invece di somme.



### Un esempio

$$x(t) = \text{rect}_\Delta(t - \Delta) - \text{rect}_{2\Delta}(t - 2\Delta)$$

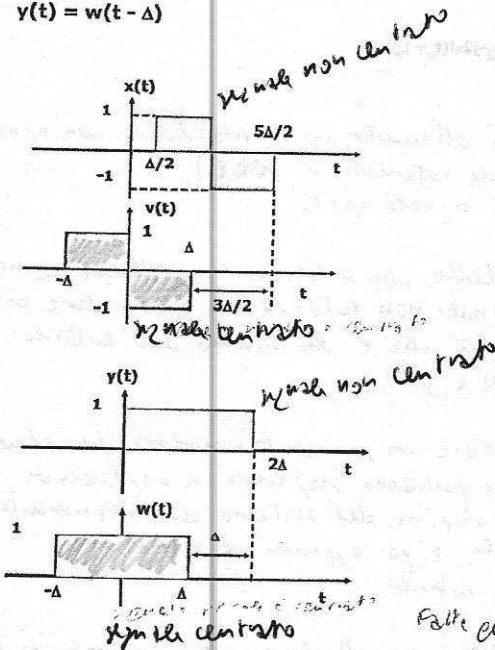
$$y(t) = \text{rect}_{2\Delta}(t - \Delta)$$

$$v(t) = \text{rect}_\Delta(t + \Delta/2) - \text{rect}_\Delta(t - \Delta/2)$$

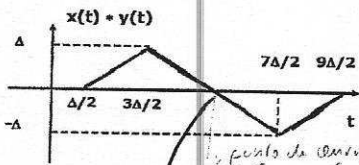
$$x(t) = v(t - 3\Delta/2)$$

$$w(t) = \text{rect}_{2\Delta}(t)$$

$$y(t) = w(t - \Delta)$$



$$v(t) * w(t) \Rightarrow \text{ritardo } 5\Delta/2 \Rightarrow x(t) * y(t)$$



Fatte queste due operazioni dei segnali si fa la convoluzione tra le due segnali scelta con un riferimento differente, gli convoluta; e applichiamo un ritardo di  $\frac{5\Delta}{2}$

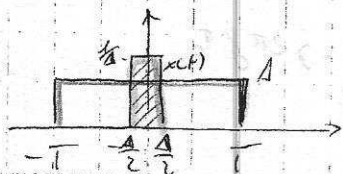
Il punto di convoluzione fatto convoluzione con due segnali

Il Teorema di Parseval - 8 / 8 - Lezione 12

punto di centratura delle convoluzioni dei due segnali

nota 1

Il trapezio, alla luce delle convoluzioni, può essere ottenuto come convoluzione tra un



impulso rettangolare di durata  $2T$ , impulso  $x(t)$  e un secondo impulso rettangolare, di lunghezza  $\Delta$  ed ampiezza  $1/\Delta$ .

La convoluzione dei 2 segnali riportati graficamente, sopra, dà il trapezio.

Il rettangolo  $\square$  è quello ottenuto nel caso limite, l'impulso di Dirac, se un tale rettangolo risulta essere sostanzialmente il limite delle successioni delle convoluzioni tra rettangoli di durata  $2T$  e i rettangoli che hanno un'area unitaria e che sostanzialmente rappresentano in pratica la scelta e la durata degli impulsi.

Questo ci permette di considerare che tutti i segnali che possiamo considerare possono essere riconducibili ad un unico insieme di impulsi

fine  
nota 1

## LEZ. 13 - CONVOLUZIONE, APPLICAZIONI

### TRASFORMATA DI FOURIER di un SEGNALE RITARDATO (nota 1)

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

non cambia lo spettro di ampiezza,  
lo spettro di fase viene modificato da  
un termine lineare.

### Interpretazione della trasformata

$$y(t) = x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

$$\Downarrow$$
$$\underline{X}(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\Downarrow$$
$$Y(f) = \underline{X}(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Dunque, nel segnale con ritardo, il ritardo è ricondotto a una operazione di convoluzione, con un impulso di Dirac.

L'impulso di Dirac prende il segnale e lo sposta in un'altra posizione nel tempo.

Questo è un fatto di un certo interesse operativo.

# LEZ. 13. CONVOLUZIONE, APPLICAZIONI

- **RITARDO** come una convoluzione, per cui l'impulso di Dirac ha l'effetto di prendere un segnale e spostarlo in un'altra posizione temporale.

$$y(t) = x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

$\uparrow$   
 $X(f)$

$\downarrow$   
 $e^{-j2\pi f t_0}$

$$Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

## • FORME D'ONDA CODIFICATE

Nelle forme d'onda codificate si usa un segnale che è combinazione lineare, avendo certe wellenlength  $c_k$ , di un segnale  $b_k$  spostato in  $t_k$

Segnale elementare  $b(t) \leftrightarrow B(f)$   $x(t) = b(t) * \sum_k c_k \delta(t - t_k) = b(t) * c(t)$

$$x(t) = \sum_k c_k b(t - t_k)$$

La convoluzione di  $x(t)$  e  $y(t)$  è:  $X(f) = B(f) \sum_k c_k e^{-j2\pi f t_k} = B(f) \cdot C(f)$

$$x(t) + y(t) = [b(t) + c(t)] * y(t) = [b(t) + y(t)] + c(t)$$

Capotricho essere la risp. impulsive di un certo p.t. in freq. :  $X(f) Y(f) = [B(f) C(f)] Y(f) = [B(f) Y(f)] C(f)$

Il codice diventa la convoluzione tra i segnali elementari e il codice. Il codice nella T. di F. è dato dalle ampiezze  $c_k$  e dai pattern di fase

## • CODICI BINARI

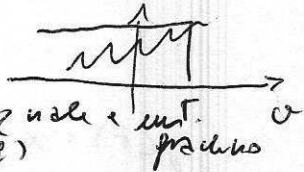
$$x(t) = \sum_k c_k \delta(t - t_k)$$

$c_k = \pm 1$ , sono codici di fase, dove nella prima

$b(t) = \text{rect}_{\frac{1}{2}}(t)$  impulso rett. di durata  $\frac{1}{2}$ .

- INTEGRAZIONE dei SEGNALI è riconducibile alla convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau$$



$y(t)$  è uguale alla convoluzione tra il segnale e un'impulso

$$y(t) = x(t) * u(t) \Rightarrow Y(f) = X(f) \cdot U(f)$$

$$U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

È una T. di F. da un integrale generalizzato senza simmetria, l'integrabile di  $y(t)$ .

Dunque

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \text{ si può scrivere } X(\omega) \text{ perché diretto solo in } \omega.$$

$$= \frac{X(\omega)}{2} \cdot \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

$$= \frac{1}{2} \delta(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- CONVOLUZIONE con SEGNALI SINUSOIDALI

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f) \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

e, applicando le proprietà dello <sup>2</sup>trasformato di Fourier:

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{X(f_0)}{2} \delta(f-f_0) + \frac{X(-f_0)}{2} \delta(f+f_0)$$

$$X(-f_0) = X^*(f_0) \text{ per segnali reali, per cui}$$

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{|X(f_0)|}{2} e^{j\phi_0} \delta(f-f_0) + \frac{|X(f_0)|}{2} e^{-j\phi_0} \delta(f+f_0)$$

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t) = |X(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$



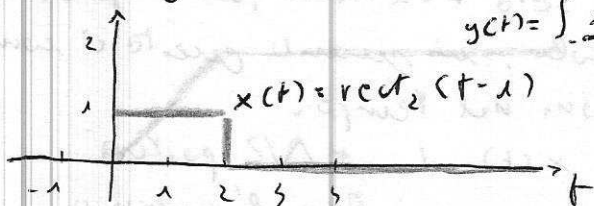
Esempio di convoluzione tra due forme d'onda, entrambe codificate,  $b_x$  e  $b_y$  sono i segnali elementari,  $c_x$  e  $c_y$  sono i codici

$$x(t) * y(t) = [b_x(t) * c_x(t)] * [b_y(t) * c_y(t)] = [b_x(t) * b_y(t)] * [c_x(t) * c_y(t)]$$

e dunque

$$X(f) Y(f) = [B_x(f) C_x(f)] \cdot [B_y(f) C_y(f)] = [B_x(f) B_y(f)] \cdot [C_x(f) C_y(f)]$$

Esempio di integrale di un impulso rettangolare



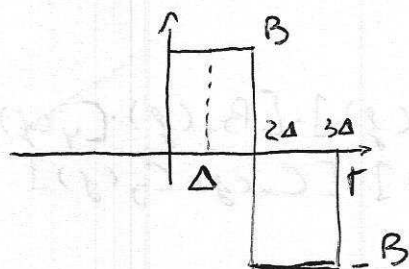
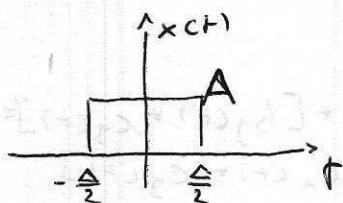
$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$ , l'integrale è divergente  $\Rightarrow$  trasformabilità in senso limitato e non in senso stretto.

$$x(t) = \text{rect}_2(t-1) \leftrightarrow X(f) = 2 \text{sinc}(2\pi f) e^{-j2\pi f}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt}_{\text{pari a } 2} \frac{X(f)}{j2\pi f} = \delta(f) + 2 \text{sinc}(2\pi f) e^{-j2\pi f}$$

Il Dirac è il termine correttivo che dipende dall'area dell'impulso; il Dirac ha un'area pari allo zero dell'area dell'impulso.

Esempio di gestione dei segnali con codici  
 sono dati due segnali,  $x(t)$  e  $y(t)$ , di cui  $y(t)$  è  
 un segnale con codice.



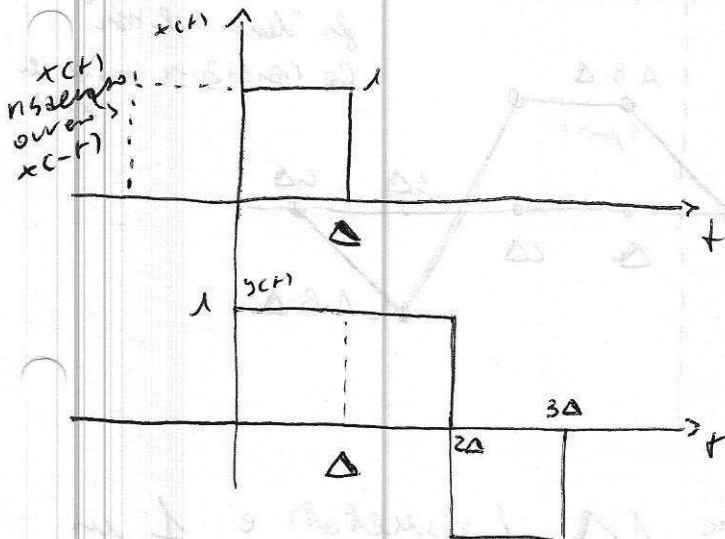
Per fare la convoluzione di questi due segnali è meglio operare nel tempo. Si devono normalizzare a 1 entrambi i segnali, avendo dividendo per  $A$  il primo e per  $B$  il secondo. A fine convoluzione il risultato dovrà essere moltiplicato per  $AB$ , al fine di denormalizzare.

Inoltre occorre allineare nel tempo gli impulsi, tralasciando  $x(t)$  e destra per farlo partire da  $t=0$ , come per il secondo segnale. Sarà necessario fare l'operazione inversa e fine calcoli, in questo caso è come una normalizzazione nel tempo.

La traduzione di  $x(t)$  di  $+\Delta/2$  porterà  $x(t)$  da  $0$  a  $\Delta$ ; occorrerà fare l'inverso e fine calcoli.

Lo spettro dell'impulso tralasciato è  $X(f)$  e che dovrà essere corretto con un  $\Delta$  in entrambi. La convoluzione sarà fatta da tratti rettangolari, avendo segnali rettangolari.

La situazione che abbiamo, dopo aver trovato  $x(t)$  e normalizzato entrambi, è:



Per fare la convoluzione si risalta e si trasla nel tempo  $x(t)$

Operando la convoluzione per via numerica, abbiamo

segnale normale e traslato, nella costruzione dei prodotti nulli

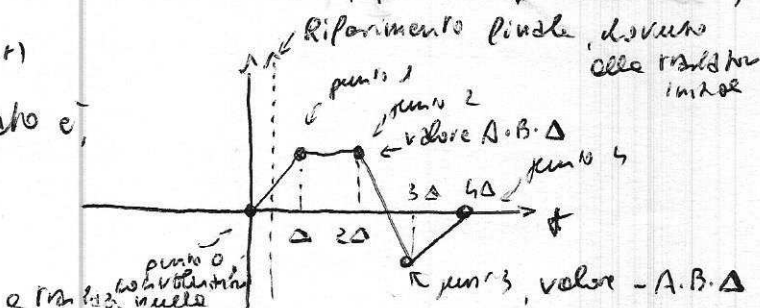
	1	1	-1	
1				0
	1			1
		1		1
			1	-1
				1
				0

Risultato della convoluzione nei punti critici

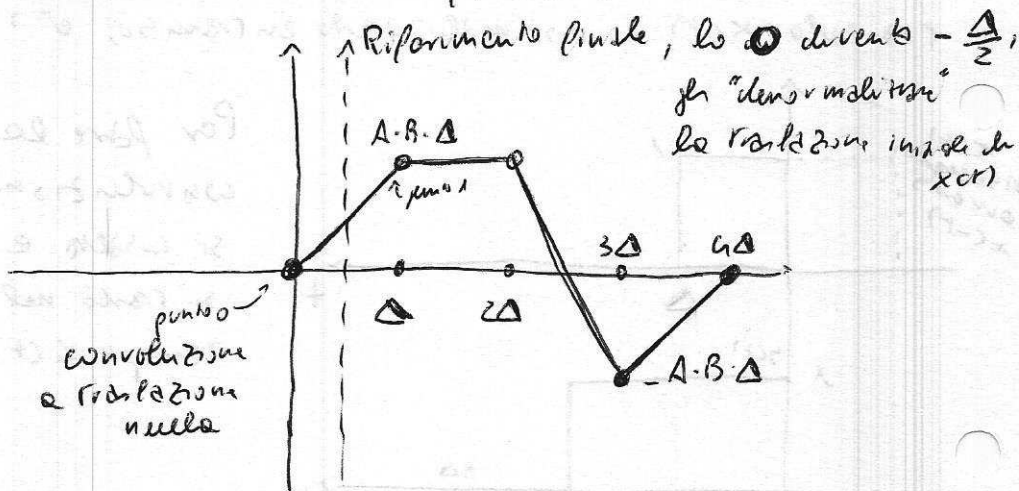
- punto 0  $\Delta$
- 1  $\Delta$
- 2  $\Delta$
- 3  $\Delta$
- 4  $\Delta$

Il segnale "corto" è traslato nel tempo  
 prima traslazione, 1  $\Delta$ , poi 2  $\Delta$ , ecc. in  $\Delta$ , ecc.  
 Translazioni nulli; si trasla  $x(t)$

Il risultato è, nel tempo



Quindi il risultato finale è:



Per traslazione  $1\Delta$  il risultato è  $1$  in tabella usata per il calcolo della convoluzione, ma questo risultato deve essere denormalizzato moltiplicando per  $AB$  e per  $\Delta$  per tener conto delle traslazioni.

Averlo, invece, avuto una traslazione iniziale di  $\frac{\Delta}{2}$  verso destra, il riferimento si modificherebbe.

Si modifica come "riferimento finale", per cui il segnale, come risultato finale, inizia in  $-\frac{\Delta}{2}$ , con un incremento di  $\Delta$

## LEZ. 14 - APPLICAZIONI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

### • CURVE LIMITE DELLO SPETTRO

Si tratta di individuare le regioni di frequenza in cui lo spettro di ampiezza è significativo.

Definizione della Trasformata di Fourier della derivata  $k$ -esima del segnale, corrisponde a moltiplicare per  $(j2\pi f)^k$  in frequenza

$$(j2\pi f)^k X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

in modulo:

$$|(2\pi f)|^k |X(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|$$

da cui

$$|(2\pi f)|^k |X(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^k}{dt^k} x(t) \right| dt$$

### • LIMITI SULLO SPETTRO DI AMPIEZZA

Si ricorrono dividendo ambo i membri dell'ultima relazione sopra, per  $|2\pi f|^k$

$$|X(f)| \leq \frac{1}{|2\pi f|^k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^k}{dt^k} x(t) \right| dt$$

Questo risultato ci porta a definire il punto zero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^k}{dt^k} x(t) \right| dt \Rightarrow \begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \text{contenuto medio del segnale, } C_m \\ k=1 &\Rightarrow \text{velocità media del segnale, } V_m \\ k=2 &\Rightarrow \text{curvatura media del segnale, } R_m \end{aligned}$$

Al variare di  $k$  si trovano diverse condizioni, per ogni  $f$  si trova una condizione più stringente di tutte le altre e questa è la strada che individua le curve limite.

In questo modo si individua il confine, ovvero il limite, della regione all'interno della quale è contenuto lo spettro di semplicità.

Non è stato impostato il calcolo della Trasformata di Fourier con tutta la sua precisione possibile, ma è stato trovato un vincolo secondo il quale una certa costante, che è legata all'integrale di una derivata di un certo ordine del segnale, risulta essere derivata da una potenza  $k$ -esima

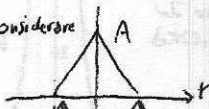
### Un esempio

un segnale triangolare di ampiezza  $A$ , che si estende da  $-\Delta$  a  $\Delta$

$$x(t) = A \text{tri}_\Delta(t) \Leftrightarrow X(f) = A \Delta \text{sinc}^2(\pi f \Delta)$$

$(\frac{\sin x}{x})^2$   
Area del segnale (mag.  $x(f)$ )

Segnale e spettro da considerare



valore costante pari alla pendenza della retta

Quando la derivata di un segnale rettangolare e la somma di due rettangoli con centro in  $-\frac{\Delta}{2}$  e  $\frac{\Delta}{2}$ , e di ampiezza  $\frac{A}{\Delta}$  e  $-\frac{A}{\Delta}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$$

La curvatura per km. Sono due: l'area del segnale assoluto, in questo caso l'area del segnale; l'area del valore assoluto della derivata del segnale

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{A}{\Delta} \left\{ \text{rect}_\Delta(t + \frac{\Delta}{2}) - \text{rect}_\Delta(t - \frac{\Delta}{2}) \right\}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{A}{\Delta} \left\{ \delta(t + \frac{\Delta}{2}) + \delta(t - \frac{\Delta}{2}) - 2\delta(t) \right\}$$

calcolare la derivata del segnale, e la derivata seconda (vedi nota)

Si considerano i valori assoluti

$$|x(t)| = A \text{tri}_\Delta(t)$$

$$\left| \frac{d}{dt} x(t) \right| = \frac{A}{\Delta} \text{rect}_{2\Delta}(t)$$

il valore assoluto diventa un unico impulso rettangolare centrato in 0 e durata  $2\Delta$  e ampiezza  $A/\Delta$

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right| = \frac{A}{\Delta} \left\{ \delta(t + \frac{\Delta}{2}) + \delta(t - \frac{\Delta}{2}) + 2\delta(t) \right\}$$

Ora si analizzano i vincoli che entrano per determinare i valori

$$|X(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = A\Delta = C_m$$

la curvatura media

L'integrale e' l'area del segnale triangolare

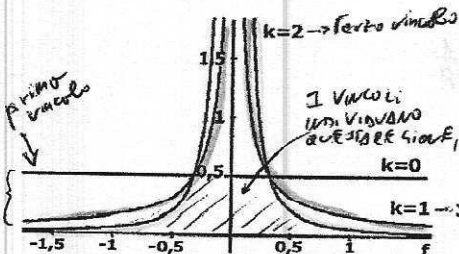
$$|X(f)| \leq \frac{1}{|2\pi f|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| dt = \frac{2A}{|2\pi f|^2} = \frac{V_m}{|2\pi f|}$$

variazione media

$$|X(f)| \leq \frac{1}{|2\pi f|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right| dt =$$

$$= \frac{4A}{\Delta |2\pi f|^2} = \frac{R_m}{|2\pi f|^2}$$

curvatura media



Il primo vincolo e' una costante che dice che lo spettro deve essere un segnale ad area del segnale.

I vincoli con i vincoli due e tre sono, dove si deve trovare lo spettro

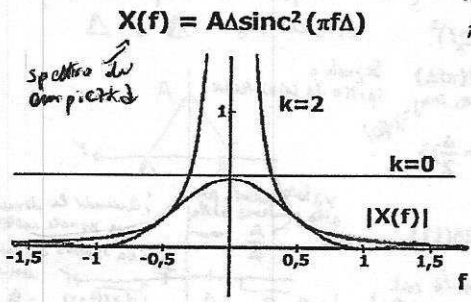
il secondo vincolo, e' l'area della derivata dello spettro di fase per  $2\pi f$ . L'andamento e' un ramo di iperbole

$$A=0,5$$

$$\Delta=1$$

con  $A = \frac{1}{2}$  e  $\Delta = 1 \Rightarrow$  Area del segnale =  $\frac{1}{2}$  (e del segnale)

Rivediamo il risultato ottenuto, ricordando che l'espressione dello spettro è la  $X(f)$  riportata sotto, del quale è riportato nel grafico il modulo. Nel grafico sono riportate le curve per  $k=0$  e  $k=2$ , che sono le curve limite dello spettro che dovrà essere considerato.



È verificato il fatto che lo spettro di ampiezza è contenuto all'interno della regione delimitata dalle curve.

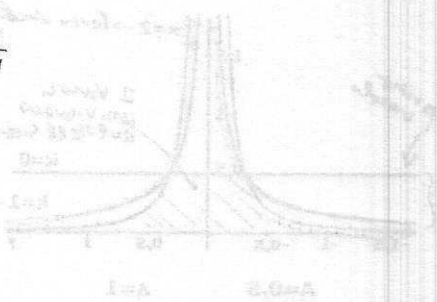
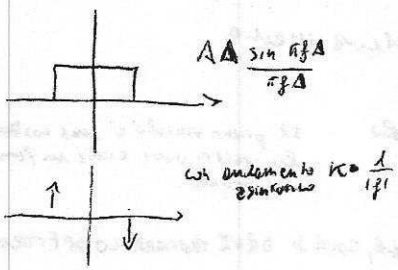
**Andamento dello spettro per  $f$  che tende all'infinito** →

Se, derivando il segnale, per un certo ordine ( $m$ ) compare un impulso di Dirac, allora il comportamento dello spettro di ampiezza al tendere di  $f$  all'infinito è del tipo:  $C/|f|^m$

cioè l'andamento dello spettro per frequenze alte.

**definizione preliminare della banda dei canali di trasmissione**

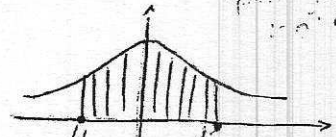
Una conferma finale di questo, sta nel considerare un impulso rettangolare:





## Problema delle finestre

Limitazione in frequenza dello spettro di un segnale, ad un intervallo



discontinuità dello spettro in questo punto  
 ⇒ limiti del rettangolo, ⇒ limitazione della banda alla zona evidenziata

Finestre rettangolari:

$$X_w(f) = X(f) \text{rect}_{2B}(f) \Leftrightarrow C/t$$

$$X_w(f) = X(f) W(f)$$

Finestra

l'andamento del segnale nel tempo dipende dal tipo di segnale, per la probabilità presente di impulsi di D.S.C.

L'andamento del segnale nel tempo è del tipo  $1/t$ , per la probabilità presente di impulsi di D.S.C. dipende per limitare un banda e per evitare che il segnale si smorzi molto lentamente ( $1/t$ ), non bisogna filtrare in modo così rigido, ma bisogna pesare lo spettro attraverso una finestra, che non ha un andamento rettangolare.

## Limitazione in banda

→ Controllo del comportamento per  $t \rightarrow \infty$

→ Perdita di potere risolutore

Applicazione importante della T.d.F.

### Soluzione delle equazioni differenziali a coefficienti costanti

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) = x(t)$$
 eq. diff. le n derivate di un segnale  $y(t)$   
 soluzione con T.d.F.  
 segnale  $x(t)$ , costante,  $y(t)$  è l'incognita

$$\sum_{n=0}^N a_n (j2\pi f)^n Y(f) = X(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{\sum_{n=0}^N a_n (j2\pi f)^n}$$
 il problema ora, è l'antitransformata

La soluzione di eq. differenziali a coeff. costanti è molto semplice nel dominio della Trasformata di Fourier; in questo la derivata di un segnale, nel dominio della frequenza, significa moltiplicare lo spettro del segnale per  $j2\pi f$ .

$$Y(f) = \frac{X(f)}{\sum_{n=0}^N a_n (j2\pi f)^n}$$

**Problema: la Antitrasformazione**

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{t^n} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m}{t^m} x(t)$$

↕

$$\sum_{n=0}^N a_n (j2\pi f)^n Y(f) = \sum_{m=0}^M b_m (j2\pi f)^m X(f)$$

infecciosa  
✓ cancellazione

Espressioni della T. di F. dell'uscita

usate nelle funzioni razionali

$$Y(f) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m (j2\pi f)^m}{\sum_{n=0}^N a_n (j2\pi f)^n} X(f)$$

Ha inoltre una importante altra applicazione

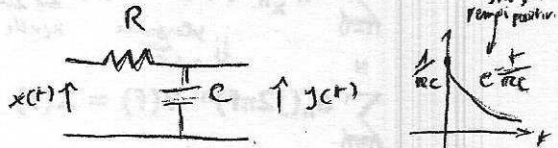
Esempio (vd. in appendice)

$$RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$$

$$j2\pi f RC Y(f) + Y(f) = X(f)$$

$$Y(f) = \frac{X(f)}{1 + j2\pi f RC} = X(f) H(f)$$

$$y(t) = x(t) * \frac{e^{-t/RC}}{RC} u(t)$$



funzione che dipende dai dispositivi R e C presenti nel circuito

→ il prodotto di Trasformate corrisponde, infatti, una convoluzione dei segnali

Applicazioni della trasformata di Fourier - 6/8 - Lezione 14

zeta trasformata di H(s), con H(s) =  $\frac{1}{1+sRC}$  l'antitrasformata con esponenziale con decroscimento in t.

Generalmente, attraverso il quale notiamo che nel dominio della trasformata, il comportamento di tutte le componenti (resistori, induttori e condensatori) è sempre lo stesso, considerando la volta un vettore una resistenza, una induttanza, una capacità, che risultano essere tutte valori di proporzionalità

resistenza  $\rightarrow$  costante

$$v(t) = Ri(t) \Leftrightarrow V(f) = RI(f)$$

induttanza  $\rightarrow$  costante

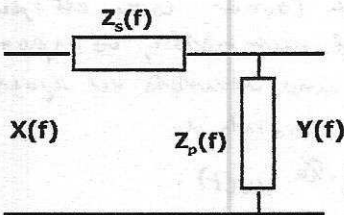
$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \Leftrightarrow V(f) = j2\pi fLI(f)$$

$L$  è l'impedenza dell'induttanza rispetto alle corrente

capacità  $\rightarrow$  costante

$$i(t) = c \frac{d}{dt} v(t) \Leftrightarrow V(f) = \frac{1}{j2\pi fC} I(f)$$

La impedenza del condensatore risulta sempre la reciproca di quella dei circuiti,



L'impedenza derivata del condensatore è  $\frac{1}{j2\pi fC}$  e la resistenza in serie è R

$$Y(f) = X(f) \frac{Z_p(f)}{Z_p(f) + Z_s(f)}$$

$$H(f) = \frac{Z_p(f)}{Z_p(f) + Z_s(f)}$$

rispetto al circuito di esempio, nel dominio della frequenza, diventa essere un partitore.

Quindi posso ricavare la trasformata dell'uscita, nel dominio della frequenza, che è data dalla trasformata di F.

dell'ingresso per il rapporto tra la resistenza derivata e la somma tra la resistenza derivata e la resistenza in serie. Il rapporto tra le trasformate dell'uscita e dell'ingresso è una funzione delle frequenze che dipende dai componenti utilizzati, della  $\omega(f)$ , che è quindi

Esempio. Nel ramo derivatore si inserisce una induttanza

$$H(f) = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

espressione ridotta

$$Z_p(f) = j2\pi fL$$

$$Z_s(f) = R$$

$$H(f) = \frac{j2\pi fL}{R + j2\pi fL} = \frac{j2\pi fL/R}{1 + j2\pi fL/R}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} u(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

I due rapporti di parte sono, rispettivamente con condensatori e un induttore solo:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$H(f) = \frac{j2\pi f L/R}{1 + j2\pi f \frac{L}{R}}$$

Essi possono essere considerati equivalenti se  $RC = \frac{L}{R}$

La differenza sostanziale sta nel numeratore, che è, a meno di una costante,  $j2\pi f$

Sovvenendo

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi f \frac{L}{R}}$$

ci possiamo rendere conto, ricordando una proprietà della Trasformata di Fourier, come all'operatore  $j2\pi f$  presente al numeratore, corrisponde la presenza di una derivata nel segnale, e in particolare la derivata di

$$F^{-1} \frac{1}{1 + j2\pi f \frac{L}{R}} = \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

invertit.  
di Fourier

→ uguale a  $RC$ , la T. è  $\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$ ,  
allora la Trsf. dell'espressione è:

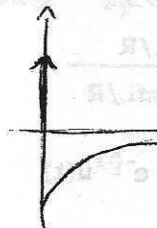
$$\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

che avrà lo stesso andamento dell'esponenziale.

Se faccio la derivata e moltiplico per  $\frac{L}{R}$  si trova che la T. dell'espressione è

$$h(t) = f(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{RC}}$$

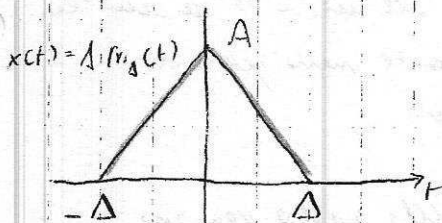
e questo è l'andamento della risposta impulsiva e del segnale nel tempo



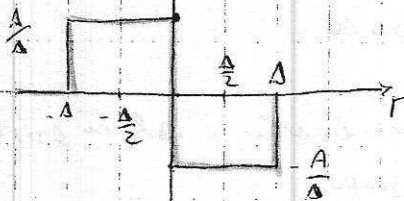
Il fattore  $H(f)$ , che ci fa passare dalla Trsf. del segnale a quella della uscita è un rapporto di D/B, e lui viene sotto un andamento esponenziale.

# SEGNALE TRIANGOLARE:

derivata prima e derivata seconda

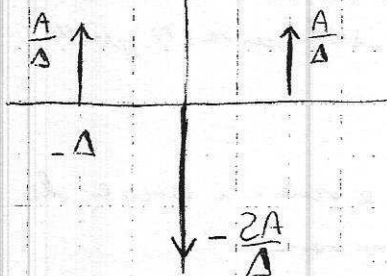


Un segnale triangolare di ampiezza  $A$ , che si estende a  $-\Delta$  e  $\Delta$



La derivata del segnale sopra è la somma di due rettangoli, uno centrato in  $-\frac{\Delta}{2}$ , l'altro in  $\frac{\Delta}{2}$ , e di ampiezza  $A/\Delta$  e  $-A/\Delta$  ovvero

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{A}{\Delta} \left[ \text{rect}_{\Delta} \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) - \text{rect}_{\Delta} \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) \right]$$



La derivata seconda è la derivata di un segnale che presenta 3 discontinuità una in  $-\Delta$ , una in un cuneo un impulso di Dirac positivo, un quanto

la transizione è positiva, di ampiezza  $A/\Delta$ , una in  $t=0$ , in un cuneo un impulso di Dirac negativo in quanto la transizione è a rendere, di ampiezza  $-2A/\Delta$ , il terzo in  $t=\Delta$ , è un impulso di Dirac positivo di ampiezza  $A/\Delta$ .

Dunque

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{A}{\Delta} \left[ \delta \left( t + \frac{\Delta}{2} \right) + \delta \left( t - \frac{\Delta}{2} \right) - 2\delta(t) \right]$$

LE FUNZIONI DA CONSIDERARE SONO QUINDI 3: IL SEGNALE, LA DERIVATA DEL SEGNALE E LA DERIVATA SECONDA DEL SEGNALE. (Non la derivata terza, in quanto è integrale di Dirac per cui è

Non si va oltre la derivata secondo noi per ragioni analitiche ma piuttosto per il fatto che l'integrale dello derivata da un mese va all'infinito, per cui la derivazione che definisce il limite nella pratica è empirica e formalmente verificata.

Quindi le curve limite dello spettro vengono definite nel loro comportamento, dal quale, lo derivata prima e lo derivata secondo.

Di queste derivazioni essere considerate a valori assoluti quello del quale e il quale stesso.

Quello dello derivata prima è un unico impulso rettilineo, quello dello derivata secondo è la somma di tre direz., tutte con segno positivo, per cui è stato un valore quello di segno negativo.

A questo punto si devono andare a vedere a nuove che queste tre funzioni vanno a determinare

## LEZ. 15 - LA BANDA di un SEGNALE

Ci sono diverse definizioni di banda di un segnale.  
Una legata all'energia eccitabile del segnale,  
una legata all'andamento della forma d'onda nel tempo, una è legata alla definizione di banda a 3dB, una è legata alla definizione di banda equivalente di un segnale a cui è uguale quella di durata equivalente di un segnale.

### Banda di un segnale ed Energia

Un segnale con durata rigorosamente limitata ha banda infinita e, dualmente, un segnale con banda rigorosamente limitata ha durata illimitata.

Per un segnale di durata finita e spettro di larghezza infinita abbiamo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(f) e^{j2\pi ft} df$$

Definizione di coefficiente spettrale dello spettro di ampiezza del segnale  $x(t)$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(f)|^2 df$$

l'energia del segnale è il modulo dello spettro di ampiezza al quadrato, ovvero dello stesso spettro di densità di energia

Se larghezza dello spettro è infinita, allora è necessario limitarla, in quanto è impossibile trasmettere tali segnali con una larghezza di banda infinita.

Si adotta dunque una approssimazione del segnale, delta  $x_a$ , che è definito in un intervallo di

banda compreso tra  $-B$  e  $B$  e che è equivalente al segnale originale  $x(t)$  nell'intervallo suddetto, ed è 0 altrove.

In sostanza  $x_a(t)$  è limitato, in frequenza, da un rettangolo di ampiezza  $2B$ , quindi abbiamo

$$x_a(t) = \int_{-B}^B X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X_a(f) = X(f) \text{rect}_{2B}(f)$$

$$E_a = \int_{-B}^B |X(f)|^2 df$$

$E_a$  è l'energia del segnale approssimato, del segnale  $x_a(t)$ , limitato alla banda  $B$ .

L'approssimazione del segnale comporta un errore, tale errore può essere definito in modo diverso, meglio sempre in relazione all'energia del segnale, e dunque non in relazione all'andamento in tempo.

Infatti definendo il tipo di errore dello errore istantaneo e puntuale come

$\lim_{B \rightarrow \infty} E_{ea}(t) = 0$ , con  $E_{ea}(t) = x(t) - x_a(t)$ , abbiamo che l'errore è la differenza tra il segnale e il segnale approssimato, valutata nel tempo, dell'ultima equazione

Dunque viene definito  $E_{ea}$ , errore quadratico medio, come

$$E_{ea}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 dt$$

energia dell'errore istantaneo.



Sviluppando il quadrato e applicando il Teorema di Parseval si ottiene che l'energia dell'errore è  $E_{\text{err}}^2$ , funzione monotona decrescente

$$E_{\text{err}}^2 = E_x - E_d = \int_{-\infty}^{-B} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_B^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

In questa relazione, allargando  $B$  si riduce l'errore. Però l'errore ha un problema che dipende dall'ampiezza del segnale, per cui viene definito l'errore quadratico percentuale, normalizzando l'errore  $E_{\text{err}}^2$  alla energia del segnale.

ERRORE QUADRATICO PERCENTUALE

$$E_p = \frac{E_x - E_d}{E_x} = 1 - \frac{\int_{-B}^B |X(\omega)|^2 d\omega}{E_x}$$

$\lim_{B \rightarrow \infty} E_p = 0$  , perche' l'integrale tendera' a  $E_x$ , l'energia del segnale.

Tutto questo per quanto riguarda l'energia del segnale e non considerando l'andamento nel tempo del segnale approssimante  $x_d(t)$ .

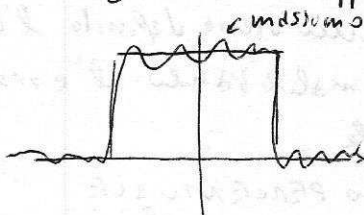
Esso risulta, dopo una serie di ipotesi, un segnale che assomiglia ad un rettangolo, del quale dobbiamo coprire l'entità dell'errore. Analiticamente troviamo che la somma di  $x_d(t)$  e' lo segnale:

$$x_{\text{act}}(t) = \frac{A}{\pi} \left[ \text{Si} \left( 2\pi B \left( t + \frac{T}{2} \right) \right) - \text{Si} \left( 2\pi B \left( t - \frac{T}{2} \right) \right) \right]$$

in cui  $\text{Si}$  è la funzione seno integrale, definita come

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

L'approssimazione del rettangolo è tanto più buona all'aumentare di  $B T$ , che rappresenta il numero di massimi della funzione approssimante; graficamente:



con  $B T$  massimo nelle relative zone; quindi  $B T$  può essere

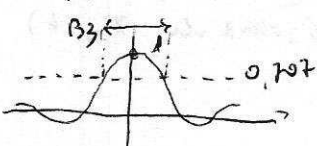
- 1  $\rightarrow$
- 2  $\rightarrow$
- 3  $\rightarrow$

Per  $B T = 10$  l'approssimazione del rettangolo comincia ad essere buona, ma il massimo non sta diminuendo del suo valore, per cui il problema diventa quello di energia banda del segnale dovrà essere salvaguardata.

Abbiamo una ulteriore definizione di banda

### Banda a 3 dB

È l'intervallo di frequenza in cui l'ampiezza dello spettro non è inferiore a  $0,707 = 1/\sqrt{2}$  volte il valore massimo



$$B_3 = \frac{0,886}{T}$$

La banda è proporzionale al numero di impulsi che entrano, all'inverso della durata dell'impulso.

Abbiamo una ulteriore definizione di banda, molto analitica, la banda equivalente di un segnale, accompagnata dalla definizione di durata equivalente di un segnale, con un vincolo.

Banda equivalente di un segnale

$$B_{eq}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\bar{X}(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{X}(f)|^2 df}$$

Durata equivalente di un segnale

(si sostituisce  
lo freq. col  
tempo)

$$D_{eq}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

vincolo:

$$B_{eq} \cdot D_{eq} \geq \frac{1}{4\pi}, \quad \text{questo è un vincolo tra le due grandezze}$$

Il loro prodotto non può essere inferiore a  $1/4\pi$ . Questo è importante per notare che se il segnale è limitato in tempo allora è limitato in frequenza e viceversa.

Banda larga  $\Rightarrow$  durata corta e viceversa.

In this problem we are given a function  $f(x)$  and a point  $a$ . We want to find the limit of  $f(x)$  as  $x$  approaches  $a$ .

The function is  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  and the point is  $a = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

To verify this, we can use the epsilon-delta definition of a limit.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

For any  $\epsilon > 0$ , we can find a  $\delta > 0$  such that if  $0 < |x - 2| < \delta$ , then  $|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}| < \epsilon$ .

In this problem, we are given a function  $f(x)$  and a point  $a$ . We want to find the limit of  $f(x)$  as  $x$  approaches  $a$ .

# LEZ. 16 - CORRELAZIONE

La correlazione incrociata tra due segnali è il loro prodotto scalare, con uno dei due segnali traslato

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) Y(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

ovvero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^*(t) y(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X^*(f) Y(f)}_{\text{convoluzione tra i due segnali}} e^{j2\pi f \tau} df$$

Se i due segnali sono uguali, si parla di

- autocorrelazione di  $x(t)$ , indicata con  $R_{xx}(\tau)$ ;

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f \tau} df$$

è l'energia trasmissibile di  $|x(f)|^2$ .

- CORRELAZIONE INCROCIATA TRA SEGNALE DI POTENZA

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} X^*(t) y(t+\tau) dt$$

- AUTOCORRELAZIONE DI UN SEGNALE DI POTENZA

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} X^*(t) x(t+\tau) dt$$

- CORRELAZIONE INCROCIATA TRA SEGNALI PERIODICI

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t+\tau) dt$$

- AUTOCORRELAZIONE DI UN SEGNALE PERIODICO

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

- PROPRIETA' dell'AUTOCORRELAZIONE

Autocorrelazione nell'origine, da cui si nota come  
 l'autocorrelazione sia legata  
 a l'altezza energetica

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E_x \quad \text{per segnali di energia}$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt = P_x \quad \text{per segnali di potenza, che non diminuiscono nel t. inf.}$$

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = P_x \quad \text{per segnali periodici}$$

- PROPRIETA' DI SINMETRIA delle CORRELAZIONI

$$\begin{aligned} R_{xy}(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t-\tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\theta+\tau) y(\theta) d\theta = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta+\tau) y^*(\theta) d\theta \right]^* = \\ &= R_{yx}^*(\tau) \end{aligned}$$

Dunque la correlazione tra  $x$  e  $y$  valutata per tempi negativi è la coniugata della correlazione incrociata tra  $y$  e  $x$  valutata per tempi positivi.

La simmetria della correlazione è, nel caso di segnali identici:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}^*(\tau)$$

$$|R_{xx}(-\tau)| = |R_{xx}^*(\tau)| \Rightarrow \text{pari}$$

Inoltre, per segnali reali, l'autocorrelazione è reale e pari.

• **INDIPENDENZA delle TRASLAZIONI**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-t_0) y(t-\tau-t_0) dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\vartheta) y(\vartheta-\tau) d\vartheta = R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

In particolare l'autocorrelazione è indipendente dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento.

## o MASSIMO DELL'AUTOCORRELAZIONE

L'autocorrelazione assume il suo valore massimo, in modulo, nell'origine.

Dimostrazione

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |x(t+\tau)|^2 dt$$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ, in cui le integrali al secondo membro rappresentano l'energia dei segnali.

Da questo si deduce che  $|R_{xx}(\tau)| \leq E_x = R_{xx}(0)$

Si può dimostrare in modo analogo che, per i segnali di potenza assiemo

$$|R_{xx}(\tau)| \leq P_x = R_x(0),$$

quindi il massimo dei segnali di potenza è la potenza del segnale, con l'autocorrelazione calcolata nell'origine.

L'uguaglianza è valida, per  $\tau \neq 0$  solo se, per un dato valore del ritardo  $\tau$ , le due funzioni  $x(t)$  e  $x(t+\tau)$  sono proporzionali fra loro. Questo accade nel caso banale di segnali costante e solo nel caso di segnali periodici, se  $\tau$  è pari



ad un multiplo intero del periodo  $T$  del segnale.

L'autocorrelazione di un segnale periodico, di periodo  $T$ , è una funzione periodica di periodo  $T$ .

$$x(t+nT) = x(t)$$

Autocorrelazione di un segnale di energia con spettro traslato

$$x(t) = y(t) e^{j(2\pi f_0 t + \psi)}$$

$y(t)$  è un segnale di energia, lo è anche  $x(t)$ .

$$X(f) = G(f-f_0) e^{j\psi}$$

AUTOCORRELAZIONE

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^* y(t+\tau) e^{-j(2\pi f_0 t + \psi)} e^{j(2\pi f_0 (t+\tau) + \psi)} dt \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) y(t+\tau) dt = \\ &= R_{yy}(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} \end{aligned}$$

Quindi l'autocorrelazione del segnale traslato in frequenza, è l'autocorrelazione del segnale, in banda passante, moltiplicato per  $e^{j2\pi f_0 \tau}$ .

## Legame tra correlazione e convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\tau} x^*(\sigma) y(\tau-\sigma) d\sigma$$

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{convoluzione}}}{*} y(t)$$

Dunque la correlazione incrociata tra due segnali è la convoluzione tra i due segnali stessi, di cui uno è coniugato e cambiato di segno.

Si valuta questo ricordando che per la convoluzione la trasformata è il prodotto delle trasformate, mentre per la correlazione è il prodotto del coniugato della trasformata per l'altro.

## Calcolo in tempo della correlazione

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt$$

- si prende  $y(t)$  da una corrente  $\tau$ ;  
 $\tau > 0$  per traslazioni verso sinistra,  
 $\tau < 0$  per traslazioni verso destra
- si prende il prodotto tra il segnale traslato e l'altro segnale, quello non traslato, coniugato.
- si calcola l'area del prodotto.

## LEZ. 17 - LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Ritornando al problema di trovare le espressioni che governano il transito dei segnali nei sistemi, sistemi lineari, permanenti, stabili e causali.

Nei sistemi lineari e permanenti l'uscita è la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

e vale per un ingresso  $x(t)$  di qualsiasi tipo

SI RICORDA CHE UN SISTEMA È LINEARE SE VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

SE L'INGRESSO È UNA COMBINAZIONE LINEARE DI SEGNALE ALLORA L'USCITA CORRISPONDENTE È LA COMBINAZIONE LINEARE SECONDO GLI STESSI COEFFICIENTI, DELLE RISPOSTE CHE SINGOLARMENTE CORRISPONDONO AI SINGOLI INGRESSI.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum a_i x_i(t) \\ y(t) &= \sum a_i y_i(t) \end{aligned} \right\} \text{Linearità}$$

UN SISTEMA È PERMANENTE SE  $x(t) \rightarrow y(t)$  ED OPERA UNA TRASLAZIONE SUL SEGNALE ALLORA  $x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$ , CIOÈ L'USCITA È UGUALMENTE RITARDATA. } Permanenza

Nel dominio della frequenza, ad una convoluzione corrisponde un prodotto

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f) W(f)$$

con  $v(t)$  e  $w(t)$  trasformabili

In un sistema l'ingresso  $x(t)$  è trasformabile e  $x$  è un segnale di energia o  $x$  è impulsivo e quindi deve soddisfare le condizioni di Dirichlet.

La risposta impulsiva  $h(t)$  è quella che si ottiene in uscita quando l'ingresso è un impulso di Dirac.

Associare alle risposte impulsiva un andamento in frequenza, e quindi determinare la trasformata di Fourier è una semplificazione del problema di ricavare le espressioni che governano il transito dei segnali in sistemi che siano lineari, permanenti, stabili e causali.

Per determinare una trasformata di  $h(t)$  occorre che il sistema sia stabile.

SI RICORDA CHE UN SISTEMA È STABILE QUANDO AD UN INGRESSO LIMITATO IN AMPIEZZA CORRISPONDE UNA USCITA LIMITATA IN AMPIEZZA. LA STABILITÀ È DUNQUE UNA CONDIZIONE CHE RIGUARDA LE APPARENTE DEI SEGNALE, NEL LORO COMPORTAMENTO.

Si dimostra che  $|y(t)|$  è limitato in quanto

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau) h(\tau)| d\tau$$

$\leq N_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$  e, se l'integrale è finito allora  $|y(t)|$  è limitato

massimo di  $x(t-\tau)$

Questa è una condizione necessaria e sufficiente, per cui, se un sistema è stabile, allora la risposta impulsiva di tale sistema è sommabile in senso l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \text{ è finito}$$

Quindi, per quanto sopra detto, la trasformata di Fourier di  $h(t)$  per sistemi lineari permanentemente stabili esiste, ed è  $H(f)$ , ovvero

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

che è detta funzione di trasferimento (vedi nota 1)

La fattibilità di  $h(t)$  e di  $H(f)$  sta nelle seguenti condizioni

- Sistemi idealmente realizzabili, che sono quelli che presentano la risposta impulsiva  $h(t)$  reale, come considerate nel corso. Se  $h(t)$  è reale allora
- $H(f)$  è complessa, ma con modulo simmetrico e parte immaginaria anti-simmetrica (dispari)

Queste sono le condizioni che accompagnano la trasformazione di Fourier di un segnale reale

Oltre a quanto detto, deve essere rispettato il principio di causa ed effetto, per un un sistema deve essere causale.

### Sistema causale

Per il principio di causalità, l'effetto deve seguire la causa: l'effetto è una uscita in un sistema lineare permanente, e l'uscita non può essere precedente alla causa.

Dunque

se  $x(t) = f(t)$  allora  $h(t) = 0$  per  $t < 0$   
con  $t$  inteso come tempo e non come posizione

Affinché  $h(t)$  sia nulla per tempi negativi si pone

$$h(t) = p(t) \cdot u(t),$$

assumendo che  $p(t)$  sia un segnale pari,  $p(t) = p(-t)$ .

Dunque abbiamo che

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= P(j\omega) * U(j\omega) = P(j\omega) * \left[ \frac{1}{2} \delta(j\omega) + \frac{1}{j2\pi\omega} \right] = \\ &= \frac{P(j\omega)}{2} - j \left[ \frac{P(j\omega)}{2} * \frac{1}{\pi j} \right] \end{aligned}$$

$P(j\omega)$  è reale, quindi  $H(j\omega)$  è complessa

$$\text{Im}[H(j\omega)] = -\text{Re}[H(j\omega)] * \frac{1}{\pi j} \quad \text{Re}[H(j\omega)] = \frac{P(j\omega)}{2}$$

La parte reale e immaginaria della  $H(j\omega)$  di un sistema causale non sono tra loro indipendenti.

Per capire bene cosa sia una funzione di trasferimento dobbiamo calcolare l'uscita di un ingresso sinusoidale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi)$$

$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi) * h(t)$$

$$h(t) \text{ reale} \Leftrightarrow H(f) = |H(f)| e^{j\phi(f)}$$

$$y(t) = |H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \psi + \phi(f_0)]$$

L'uscita  $y(t)$  è una sinusoide con l'ampiezza modificata dal modulo di  $H(f)$ ,  $|H(f_0)|$  e avrà la fase modificata dalla fase di  $H(f)$ .

Dunque la funzione di trasferimento è la funzione che consente di valutare come si modificano ampiezza e fase di un segnale sinusoidale applicato all'ingresso di un circuito lineare, permanente e stazionario.

(v.d. nota 2, valutazione di un circuito)

## Legame tra le correlazioni di ingresso e uscita in un sistema LP stabile

$h(t)$  è una funzione impulsiva:

L'autocorrelazione è:

$$R_{hh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t + \tau) dt \quad \Leftrightarrow \quad |H(f)|^2$$

Wiener

Volemo trovare per tanto l'uscita somigli all'ingresso:

$$R_{xy}(t) = x^*(-t) * y(t) \quad \text{applicazione della regola che trasforma una correlazione in una convoluzione}$$

$$R_{xy}(t) = x^*(-t) * \{x(t) * h(t)\}$$

$$R_{xy}(t) = \{x^*(-t) * x(t)\} * h(t) \rightarrow \text{auto correlazione dell'ingresso in convoluzione con la risposta impulsiva}$$

$$R_{xy}(t) = R_{xx}(t) * h(t)$$

auto correlazione dell'ingresso

$$\downarrow$$

$$S_{xx}(f) H(f) \quad \text{segnali di potenza}$$

$$|X(f)|^2 H(f) \quad \text{segnali di energia}$$

Volemo trovare l'auto correlazione dell'uscita:

$$R_{yy}(t) = y^*(-t) * y(t)$$

$$R_{yy}(t) = \{x^*(-t) * h^*(-t)\} * \{x(t) * h(t)\}$$

$$R_{yy}(t) = \{x^*(-t) * x(t)\} * \{h^*(-t) * h(t)\}$$

$$R_{yy}(t) = R_{xx}(t) * R_{hh}(t) \rightarrow \text{autocorrelazione della risposta impulsiva}$$

$$\downarrow$$

$$S_{xx}(f) |H(f)|^2 \quad \text{segnali di potenza}$$

$$|X(f)|^2 |H(f)|^2 \quad \text{segnali di energia}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta) h(t - \vartheta) d\vartheta$$

$$R_{xy}(t) = R_{xx}(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\vartheta) h(t - \vartheta) d\vartheta$$

$$R_{xy}(t) = R_{xx}(t) * R_{hh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\vartheta) R_{hh}(t - \vartheta) d\vartheta$$



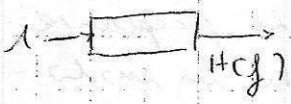
nota 1

# L'IMPORTANZA DELLA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$ DI UN SISTEMA LINEARE PERMANENTE STABILE

Quello che succede quando andiamo a considerare la risposta impulsiva: all'ingresso del sistema si deve mandare un impulso di Dirac, alle cui uscita abbiamo  $h(t)$ . Possiamo al dominio trasformata, l'ingresso è 1 e l'uscita è  $H(f)$



↓ al dominio trasformata



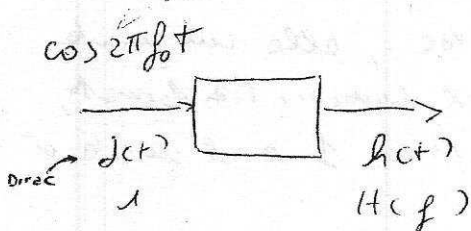
Quando mandare un impulso di Dirac all'ingresso di un sistema stabile significa andare a eccitare tutte le possibili frequenze.

Questo perché dire che la trasformata di Dirac è una costante pari a 1 significa eccitare tutte le frequenze nello stesso modo, gli noi andiamo a vedere con questo modo di eccitazione come risponde un componente a questa frequenza, il sistema.

IL SIGNIFICATO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA RISPOSTA IMPULSIVA, DATO FUNZIONE DI TRASFERIMENTO È QUELLO DI ANDARE A VERIFICARE COME RISPONDE IN FREQUENZA IL SISTEMA.

## nota 2 VALUTAZIONE di un CIRCUITO

Per valutare come risponde un circuito, lineare, permanente, stabile, si manda in ingresso al circuito una sinusoide.



Vedendo come tale sinusoide si modificherà in ampiezza e fase, si può considerare la risposta del circuito alle frequenze  $f_0$ .

È stata fatta una misura ed è stata trovata la risposta solamente ad una frequenza.

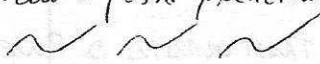
Per trovare la risposta a tutte le frequenze si deve muovere tale frequenza in modo tale da risolvere il comportamento dell' $H(f)$  al variare di tutte le frequenze.

L'idea di mandare un impulso è quella di mandare un segnale che contemporaneamente contenga tutte le frequenze, senza eccezioni, verso nessuna.

Tutte le frequenze che ~~sono~~ <sup>possibile essere</sup> presenti nel segnale.

Fisicamente non possiamo realizzare l'impulso di Dirac, ma possiamo essere realizzati un impulso cortissimo che abbia uno spettro praticamente costante all'interno di quella zona di frequenze in cui ci aspettiamo che il circuito possa funzionare.

ne  
sta 2



## LEZ. 18 - ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA

Si vuole generalizzare l'analisi armonica dei segnali in modo da trattare con la stessa metodologia sia i segnali di energia sia i segnali di potenza, che non sono trasformabili secondo Fourier.

Lo strumento unificante è l'autocorrelazione, perché essa ammette comunque la trasformazione di Fourier.

### • SEGNALI DI ENERGIA

Si definisce SPETTRO DI DENSITA' DI ENERGIA  $S_{xx}(f)$  la grandezza tale per cui

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df, \text{ dunque } S_{xx}(f) \text{ è una}$$

funzione che, integrata

su tutto l'asse delle frequenze, rappresenta l'energia del segnale. Essa deve anche rappresentare l'energia di un segnale per un dato intervallo di frequenze.

Abbiamo che

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \text{ e}$$

$$E_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(f)|^2 df$$

Dimostrare l'autocorrelazione nell'origine e l'energia di un segnale di energia

Si dimostra che  $S_{xx}(f) = |\bar{X}(f)|^2$ , tenendo presente che l'uguaglianza di due integrali non comporta l'uguaglianza delle due funzioni integrande, imponendo la condizione

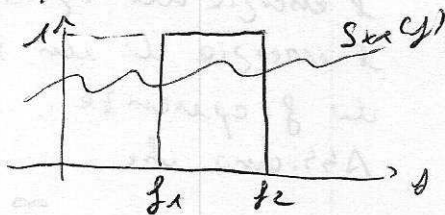
$$E(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} S_{xx}(f) df \quad ; \text{ con questa condizione, riguardante la}$$

L'energia di un segnale  $x(t)$  di energia, in un intervallo di frequenza

$[f_1, f_2]$  e l'energia del segnale  $y(t)$  ottenuto facendo

transitare  $x(t)$  in un filtro che faccia passare solo le frequenze contenute nell'intervallo dato, un filtro (conduttivo, non passivo) caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Quando il segnale passa per il filtro lo spettro di densità di energia è

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{E(f, f + \Delta f)}{\Delta f}$$

$\Delta f$  → normale ma non dell'intervallo

In quest'ultima relazione abbiamo commesso una valutazione dell'energia del segnale in un certo intervallo. Tale energia è normalizzata alla lunghezza dell'intervallo, che viene fatto tendere a 0.

Così facendo, quello che otteniamo è lo spettro di densità di energia.

L'operazione di limite può essere effettuata in modo analogo considerando l'energia in un intervallo come quella all'uscita di un filtro, data dall'auto correlazione all'uscita di un filtro, che risulta essere la convoluzione tra l'auto correlazione dell'ingresso con l'auto correlazione della risposta impulsiva del filtro, ovvero

$$R_{yy}(t) = R_{xx}(t) * R_{hh}(t)$$

che analiticamente è

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) \cdot R_{hh}(\tau - t) dt, \text{ che, per } \tau=0 \text{ è l'energia del segnale.}$$

A fronte di questo possiamo dire che l'energia in un intervallo di frequenze,  $E(f_1, f_2)$  è uguale all'auto correlazione dell'uscita del filtro calcolata in 0, ovvero  $R_{yy}(0)$ . Ovvero

$$E(f_1, f_2) = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) \cdot R_{hh}(-t) dt$$

$\downarrow$   
 $\tau = -t$  con  $\tau = 0$

Possiamo scrivere  $R_{hh}(t)$  come l'output trasformato di  $|H(f)|^2$  calcolato in  $-t$ , e quindi, poiché

$$R_{hh}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{-j2\pi f t} df$$

abbiamo

$$E(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) \cdot |H(f)|^2 e^{j2\pi f t} df dt$$

Invertendo le due integrazioni, in tempo e in frequenza e tenendo conto che  $|H(f)| = 1$  nell'intervallo  $[f_1, f_2]$ , abbiamo

$$E(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt df$$

A questo punto, sostituendo l'intervallo  $[f_1, f_2]$  con l'intervallo  $[f, f + \Delta f]$ , per avere l'espressione dell'obiettivo che ci creiamo post, abbiamo

$$E(f, f + \Delta f) = \int_f^{f + \Delta f} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt df \approx$$

$\hookrightarrow$  poco variabile in  $\Delta f$ ,  
 possiamo passare  $\Delta f$ .

$$\approx \Delta f \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Questo per chi riteniamo  $e^{-j2\pi f t}$  poco variabile nell'intervallo  $[f, f + \Delta f]$ , nella dimensione  $\Delta f$  del filtro e che quindi possa essere considerata alla costante  $\Delta f$  in frequenza.

Quindi l'integrale in frequenza si risolve come un integrale di una costante unitaria e quindi è uguale a  $\Delta f$ .

L'integrale nella espressione risultante è la Trasformata di Fourier dell'autocorrelazione di  $x(t)$ , il segnale che stiamo esaminando.

Quindi ricordando la formula di definizione dello spettro di densità di energie, esso risulta essere uguale alla Trasformata di Fourier dell'autocorrelazione di  $x(t)$ . Ovvero

$$S_{xx} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{E(f, f + \Delta f)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Questo è un risultato importante, ed è il teorema di Wiener per segnali di energie

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

$\downarrow$  spettro di densità di energie       $\downarrow$  modulo della T. di F. al quadrato.

Quando, per calcolare lo spettro di densità di energie del segnale  $x(t)$  si può:

- calcolare l'autocorrelazione  $R_{xx}(t)$  e, quindi la sua trasformata di Fourier oppure
- calcolare la trasformata di Fourier  $X(f)$  del segnale  $x(t)$  e, quindi, il modulo di  $X(f)$  al quadrato.

## • SEGNALI di POTENZA

Lo spettro di densità di potenza  $S_{xx}(f)$

è tale per cui

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

è tale per cui anche

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{P_x(f, f + \Delta f)}{\Delta f}, \text{ che è}$$

lo spettro di densità di potenza in un intervallo di frequenza.

L'espressione  $P_x(f, f + \Delta f)$  è la potenza del segnale in uscita da un filtro che ha una funzione di trasferimento  $H(f)$  pari a 1, nell'intervallo  $[f, f + \Delta f]$ , e zero altrove, quando all'ingresso è presente  $x(t)$ , segnale di potenza non trasformabile secondo Fourier



Abbiamo, in modo del tutto analogo o per analogia

$$P_x(f, f + \Delta f) = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) R_{hh}(-t) dt$$

poiché

$$R_{hh}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(f)|^2 e^{-j2\pi f t} df = \int_{f}^{f+\Delta f} e^{-j2\pi f t} df$$

" in  $[f, f+\Delta f]$

E quindi

$$P(f, f + \Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f}^{f+\Delta f} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt df \approx \Delta f \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Dunque il Teorema di Wiener per segnali di potenza è:

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{P(f, f + \Delta f)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Questo risultato è perfettamente analogo a quello ottenuto per i segnali di energia, l'unica differenza è la definizione ~~del segnale~~ dell'auto correlazione

$$R_{xx}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-t/2}^{t/2} x^*(\theta) x(t+\theta) d\theta$$

Per calcolare lo spettro di densità di potenza, con l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$  che diverge linearmente, si normalizza tale integrale e la normalizzazione diventa finita.

Altrimenti, limitando questo segnale nel tempo, il segnale è nullo al di fuori della finestra  $\Delta T$ , mentre

$$\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt \text{ è una quantità finita.}$$

$$X_{\Delta T}(t) = x(t) \text{ rect}_{\Delta T}(t)$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 energie              potenza

Del segnale di energie  $X_{\Delta T}(t)$  possiamo scrivere la funzione di autocorrelazione

$$R_{\Delta T}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\Delta T}^*(\theta) X_{\Delta T}(t+\theta) d\theta$$

e possiamo anche calcolarne la trasformata di Fourier.

L'autocorrelazione è  $R_{xx}(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} R_{\Delta T}(t)$

Lo spettro di densità di potenza è

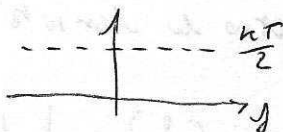
$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} |X_{\Delta T}(f)|^2$$

Esempi di segnali che sono caratterizzati da un certo spettro di densità di potenza.

### • RUMORE BIANCO

Il segnale di rumore bianco è di importanza fondamentale nei problemi di telecomunicazione che assistono alla base l'elettronica. Questo segnale è caratterizzato da uno spettro di densità di potenza costante, almeno nell'intervallo di frequenze che ci interessano e che sono quelle usate nelle telecomunicazioni. È un segnale dovuto a correnti generate dal fatto di non operare allo zero assoluto.

$$S_{NN} = \frac{kT}{2}$$



con

$k$ , la costante di Boltzmann ( $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K)

$T$ , temperatura assoluta (°K)

$kT = -174$  dBm / MHz, unità logaritmica riferita a 1 mW, milliwatt, di potenza

$R_{NN}(f) = \frac{kT}{2} \int(f)$ , e l'entità trasportata

In elettronica il moto di agitazione termica degli elettroni determina delle correnti casuali all'interno dei dispositivi, correnti che generano dei segnali sempre presenti, che in molte applicazioni limitano in maniera fondamentale il comportamento. I segnali non possono diventare troppo piccoli poiché vengono sovrastati dal rumore bianco, o termico.

Di seguito quello che succede quando il rumore bianco è presente all'ingresso di un filtro e vogliamo valutare quello che succede all'uscita.

• RUMORE BIANCO ALL'USCITA DI UN FILTRO

Si ricorda che l'autocorrelazione dell'uscita di un sistema lineare, quando da un filtro, è la convoluzione tra l'autocorrelazione dell'ingresso e l'autocorrelazione della risposta impulsive, ovvero

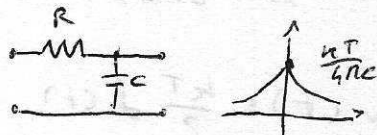
$$R_{yy}(t) = R_{xx}(t) * R_{hh}(t)$$

Poiché le autocorrelazioni sono tutte trasformabili allora lo spettro di densità di potenza in uscita è

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2$$

ovvero allo spettro di densità di potenza in ingresso moltiplicato il modulo della funzione di trasferimento al quadrato.

Per un filtro RC:



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

$$S_{yy}(f) = \frac{kT}{2} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

$$R_{yy}(t) = \frac{kT}{4RC} e^{-|t|/RC}$$

costante di tempo del circuito,  $\omega_{banda} = 5$

Esemp. di segnale che sono caratterizzati da un certo spettro di densità di potenza.

Il segnale di "Rumore bianco" è di importanza fondamentale nei problemi di telecomunicazione che stiamo a che ha l'elettronica - elemento chiave è caratterizzato da uno spettro di densità di potenza costante, almeno nell'intervallo di frequenze che ci interessano e che può essere visto nelle telecomunicazioni. È un segnale distorto e correlato generato dal polo di un segnale alle zero annullato.

$$S_{NN}(f) = \frac{kT}{2}$$

K costante di Boltzman ( $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$ )

T temperatura assoluta ( $^\circ\text{K}$ )

KT = -114dB<sub>m</sub>/MHz

$$R_{NN}(t) = \frac{kT}{2} \delta(t)$$

Quello che succede passando al rumore bianco è prodotto dell'ingresso di un filtro e vogliamo valutare quello che succede all'uscita.

Rumore bianco all'uscita di un filtro (filtro RC)

$$H(f) = \frac{1}{1+j2\pi fRC} \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$$

perché il rumore

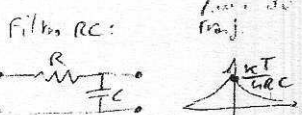
$$S_{yy}(f) = \frac{kT}{2} \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$$

$$R_{yy}(t) = \frac{kT}{4RC} e^{-|t|/RC}$$

costante di tempo del circuito.  
Olivieri-Fourier = RC.

Si ricorda che  $R_{yy}(t) = R_{xx}(t) * |H(f)|^2$  (convoluzione).

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2$$



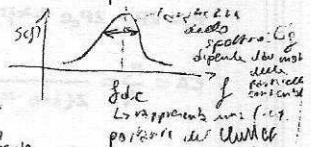
Spettro di densità di potenza di echi radar ambientali - clutter

che da ora in poi sono tutti clutter

$$S_{cc}(f) = \frac{P_c}{\sqrt{2\pi\sigma_f}} e^{-\frac{(f-f_{dc})^2}{2\sigma_f^2}}$$

$P_c$  è la potenza degli echi;  
 $f_{dc}$  è la portante doppler, la sua costante dipende dal fatto che si stiano muovendo o no.  
 $\sigma_f$  è la larghezza dello spettro.

Si assume che l'andamento dello spettro del clutter di potenza sia gaussiano.



$$R_{cc}(t) = P_c e^{-2\pi\sigma_f^2 t} e^{-j2\pi f_{dc} t}$$

Analisi armonica generalizzata di  $S_{cc}(f)$ ; si ottiene l'auto correlazione del clutter.

Analisi armonica generalizzata - 6/18 - Lezione 18

Formule spettro - portante spettro della portante della portante doppler dell'andamento

del clutter

**Potenza dei disturbi a valle di un singolo cancellatore**, *deh e chi*

$$S_{yy}(f) = S_{cc}(f) |H(f)|^2 = \frac{P_c}{\sqrt{2\pi\sigma_f}} e^{-\frac{(f-f_{dc})^2}{2\sigma_f^2}} 4\sin^2(\pi f T_R)$$

*densità di potenza in uscita*

$$S_{yy}(f) = \frac{P_c}{\sqrt{2\pi\sigma_f}} e^{-\frac{(f-f_{dc})^2}{2\sigma_f^2}} 2\{1 - \cos(2\pi f T_R)\}$$

*in banda*

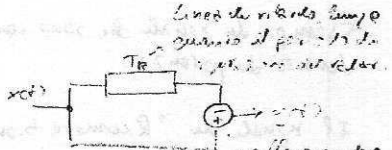
$$R_{yy}(t) = 2R_{cc}(t) - R_{cc}(t-T_R) - R_{cc}(t+T_R)$$

$$P_y = 2R_{cc}(0) - R_{cc}(-T_R) - R_{cc}(T_R)$$

*auto-correlazione della uscita*

*Potenza di uscita,  $P_y$ , ricavata ponendo  $t=0$ .*

*questo è la potenza del clutter*

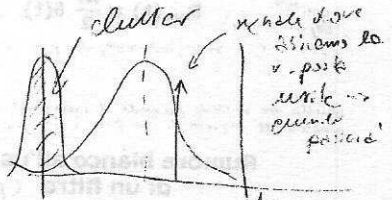


*Linea di ritardo lungo quanto il periodo di ripetizione delle cellule. Il clutter è un BPF per il quale una cella con una sola via può essere considerata.*

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi f T_R}$$

*g. di trasf. del sistema*

$$y(t) = x(t) - x(t-T_R)$$



*l'effetto di cancellazione*

**Potenza di clutter a valle di un singolo cancellatore**

*ottenuta ricorrendo alle formule di Eulero*

$$P_y = 2P_c - P_c e^{-\frac{2\pi^2 \sigma_f^2 T_R^2}{f_R}} \{e^{-j2\pi f_{dc} T_R} + e^{j2\pi f_{dc} T_R}\}$$

$$P_y = 2P_c - 2P_c e^{-\frac{2\pi^2 \sigma_f^2 T_R^2}{f_R}} \cos(2\pi f_{dc} T_R)$$

$$CA = \frac{P_c}{P_y} = \frac{1}{2\{1 - e^{-\frac{2\pi^2 \sigma_f^2 T_R^2}{f_R}} \cos(2\pi f_{dc} T_R)\}}$$

*Clutter Attenuation. L'attenuazione del clutter, per def., è il rapporto tra la potenza di ingresso e la potenza di uscita. Se  $f_{dc} = 0$  e il coeff. di correlazione è 0, otteniamo un clutter di leva, ad esempio la montagna. Il clutter non può essere come montagna, cioè la sua è la sua base.*

Lo spettro di densità di potenza è importante in quanto descrive e caratterizza fenomeni anche complessi, ed in il rumore termico,

### Proprietà dello spettro di densità di energia o di potenza

L'integrale dello spettro di densità di energia, o di potenza, è pari all'energia, o alla potenza del segnale

Lo spettro di densità di energia o di potenza di un segnale reale è una funzione reale e pari

Lo spettro di densità di energia o di potenza è una funzione sicuramente non negativa

Questo perché lo spettro, integrato in un intervallo di frequenza, dà sempre il valore che è la potenza o l'energia del segnale in quell'intervallo di frequenza, ovviamente non può essere alcun valore o energia negativa in un segnale.

Queste 3 proprietà sono legate anche alla proprietà di simmetria delle funzioni di correlazione.

che sta in fatto a  
rivelarsi, oppure il  
cluster che è praticamente  
un segnale sempre presente  
nei sistemi radar e che è  
normalmente molto più  
forte della potenza dei  
segnali utili, ovvero degli  
echi utili, dell'ordine  
di  $70 \pm 10$  dB più forte  
dei segnali utili.  
Quindi lo spettro di  
densità di potenza è molto  
in contesti reali, segnali  
con cui si lavorano  
confrontare.

La spettro di densità di potenza è un grafico in cui l'asse delle ordinate rappresenta la densità di potenza e l'asse delle ascisse rappresenta la frequenza.

**Principio dello spettro di densità di energia e di potenza**

L'istogramma dello spettro di densità di energia, o di potenza, è pari all'energia o alla potenza nel segnale.

Lo spettro di densità di energia o di potenza di un segnale reale è una funzione reale e pari.

Lo spettro di densità di energia o di potenza è una funzione sicuramente non negativa.

Il grafico dello spettro di densità di energia o di potenza di un segnale reale è sempre una funzione reale e pari. Inoltre, il grafico dello spettro di densità di energia o di potenza di un segnale complesso è sempre una funzione complessa e dispari.

Il grafico dello spettro di densità di energia o di potenza di un segnale complesso è sempre una funzione complessa e dispari.



# TEOREMA DI WIENER

- PER SEGNALI DI ENERGIA, lo spettro di densità di energia è uguale alla trasformata di Fourier dell'auto correlazione

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{E(p, f + \Delta f)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

LA DIMOSTRAZIONE CONSISTE NEL CALCOLARE L'ENERGIA IN UN INTERVALLO DI FREQUENZE PARI ALL'AUDORRECAZIONE DELL'USCITA DEL FILTRO,  $R_{yy}(t)$ , per  $t=0$ .

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

Per calcolare lo spettro di densità di energia del segnale  $x(t)$  si può:

- calcolare l'auto correlazione  $R_{xx}(t)$  e, quindi, la sua trasformata di Fourier oppure
- calcolare la trasformata di Fourier  $X(f)$  del segnale  $x(t)$  e, quindi, il modulo di  $X(f)$  al quadrato.

- PER SEGNALI DI POTENZA lo spettro di densità di potenza è uguale alle trasformate di Fourier dell'autocorrelazione.

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow \infty} \frac{P(f, f + \Delta f)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

con

$$R_{xx}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x^*(\alpha) x(t + \alpha) d\alpha$$

una diversa  
definizione  
di autocorrelazione

→ Descrizione del comportamento in frequenza, anche dei segnali di potenza -

Unificazione con i segnali di energia, attraverso l'andamento dell'autocorrelazione del segnale e non del suo andamento.

Prof. Tullio Bucciarelli  
41'47"

Lezione sui Sistemi dei Filtri  
con Definizioni dei Filtri Passa Basso, Passa Alto, Passa Banda

- Filtri passa basso, passa alto e passa banda

$$R_{yy}(t) = R_{xx}(t) * R_{hh}(t)$$

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2$$

spettro di densità  
di potenza o di energia  
della uscita

### Filtraggio dei segnali

**Si ricevono dei segnali, di cui non si conosce l'andamento in tempo, ma di cui si conosce l'occupazione di banda,**

si conosce il comportamento in frequenza.

**Saranno presenti, oltre al segnale utile, altri segnali tra cui quelli provenienti da altre stazioni, i disturbi, il rumore termico delle apparecchiature, etc**

**Per separare il segnale utile dagli altri, occorre far passare il segnale ricevuto attraverso un filtro con funzione di trasferimento H(f)**

**Il modulo di H(f) deve assumere valori alti nella banda di frequenze occupata dal segnale utile e valori bassi altrove**

L'idea di filtraggio deriva, da un punto di vista analitico, dall'applicazione del teorema per cui il segnale di uscita  $y(t)$  è legato a quello di ingresso  $x(t)$  attraverso la risposta impulsiva. Abbiamo dunque che l'auto-correlazione dell'uscita è uguale alla autocorrelazione dell'ingresso in convoluzione con l'autocorrelazione della risposta impulsiva. È una generalizzazione di  $y(t) = x(t) * h(t)$ , usata per il fatto che le autocorrelazioni sono comunemente trasformabili, indipendentemente che i segnali siano di energia o di potenza.

Attraverso le regole di Trasformata di Fourier possiamo scrivere la relazione che riguarda lo Spettro di densità, di potenza o di energia, dell'uscita,  $S_{yy}(f)$ . Tale formula ci fa capire che in scelte opportune della funzione di trasferimento  $H(f)$  possiamo modificare il contenuto frequenziale dei segnali.

Il filtraggio opera in base a queste relazioni

Quando, ragionando opportunamente la risposta in frequenza possiamo selezionare certi intervalli di frequenza e altri e quindi selezionare certi segnali.

\*N.B.: non presente nell'attuale erogazione

Per esempio il problema di ricevere un canale TV da un numero di canali è il rilevare e separare un certo intervallo di frequenze da tutti gli altri e quindi selezionare i canali ricevuti.



Due parametri applicativi importanti sono la frequenza di taglio a 3 dB e la Banda passante

### Frequenza di taglio a 3dB e Banda passante

La frequenza di taglio è la frequenza in corrispondenza della quale il quadrato del modulo della funzione di trasferimento si riduce alla metà del massimo

valore assunto, quindi si impone  $|H(f_3)|^2 = \frac{1}{2}$

$$|H(f_3)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f_3 RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_3 = \frac{1}{2\pi RC}$$

La banda passante è quella compresa tra 0 e  $f_3$

### Banda opaca

→ La Banda opaca è quella compresa tra  $f_3$  e infinito

→ Per frequenze sufficientemente maggiori di  $f_3$

$$|H(f)| \cong \frac{1}{2\pi f RC} = \frac{f_3}{f}$$

L'attenuazione fuori banda cresce 20 dB per decade (6 dB per ottava)

La frequenza di taglio  $f_3$  è calcolabile imponendo che  $|H(f_3)|$  sia pari a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Nel caso in esame si cerca che  $f_3$ , la frequenza di taglio a 3dB è  $f_3 = 1/2\pi RC$ .

La banda passante è la banda compresa tra 0 e  $f_3$ .

La banda opaca è definita come il complemento della banda passante, e quindi per le frequenze che vanno da  $f_3$  a infinito.

Essere in banda opaca è anche detto essere fuori banda.

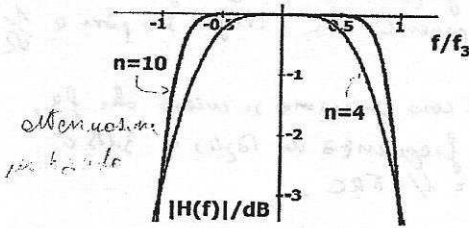
Il comportamento fuori banda rivela una capacità di attenuazione del circuito piuttosto limitata.

Se ho sulla frequenza di taglio una attenuazione di 3 dB, allora spostandosi di una decade oltre la frequenza di taglio allora si ha una attenuazione di solo 20 dB, che è molto ridotta, per cui si risponde fuori banda non sarebbe sufficientemente attenuati, ma questo è indubbio per molto sistemi di filtraggio si può allora considerare una attenuazione molto più forte.

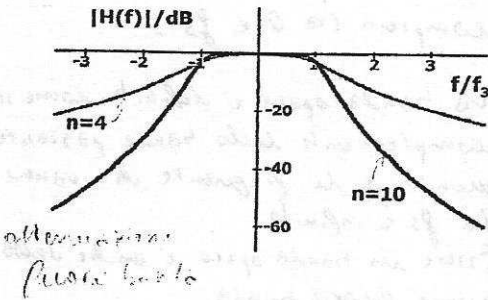
sviluppo della freq. quando passiamo da  $f_3$  a  $f$  allora, nel termine denominatore si moltiplica per 10

## Filtri di Butterworth

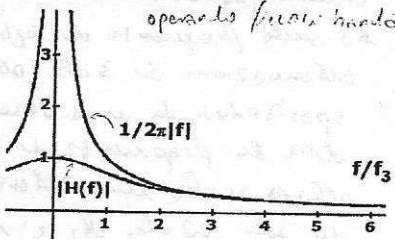
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_3)^{2n}}}$$



In questa figura il modulo della funzione di trasferimento ha l'andamento riportato in figura. Per  $n=1$  si ha l'andamento analizzato precedentemente. Il valore della frequenza di taglio,  $f_3$ , è variabile. Si nota come all'aumentare di  $n$  la risposta del filtro sia sempre più piatta.



## Il filtro passa-basso come integratore\*



\* È un integratore perché la sua risposta in frequenza è  $1/f$ .  
Il modulo è inversamente proporzionale alla frequenza.

$j\omega f$



## Il filtro passa-basso come ritardatore

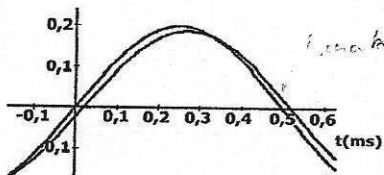
$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}} e^{-j\text{tg}^{-1}(2\pi fRC)}$$

per valori piccoli di  $f$

$$H(f) \approx e^{-j2\pi fRC}$$

*La risposta in fase è la proprietà della linea di ritardo*

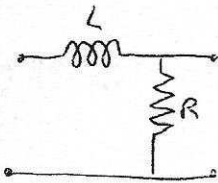
Se la banda del segnale è più piccola della frequenza di taglio, il circuito si comporta come una linea di ritardo ( $\tau_d = RC$ )



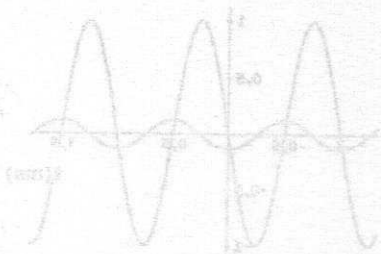
$$f_0 = 1\text{kHz}; RC = 20\mu\text{s}$$

*Costante di tempo*

Il filtro passa-basso può essere ottenuto come

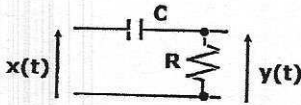


$$\omega > \frac{1}{RC} \Rightarrow \tau = \frac{R}{L}$$





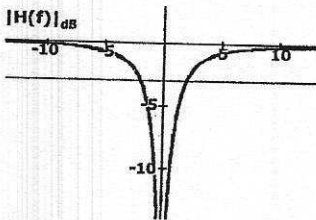
## Filtri passa-alto



Si ha il passaggio in frequenza alte e attenuazione in frequenza basse -  
 Il condensatore si comporta come un cortocircuito, in frequenza alte dunque il segnale tende a passare

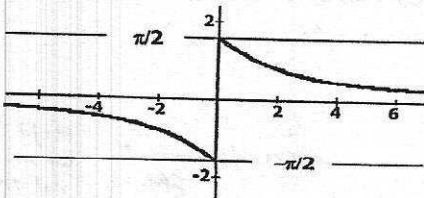
$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$

$$|H(f)| = \frac{2\pi|f|RC}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$



$$RC = 1/4\pi$$

$$\Phi_H(f) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f) - \operatorname{tg}^{-1}(2\pi fRC)$$



$$RC = 1/4\pi$$

Frequenza di taglio  $f_3$

$$f_3 = \frac{1}{2\pi RC}$$

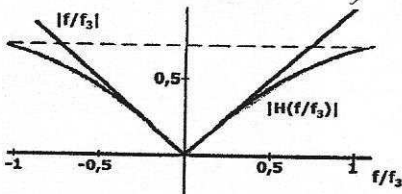
- La Banda passante è quella compresa tra  $f_3$  e infinito
- La Banda opaca è quella compresa tra 0 e  $f_3$

Problema  $\frac{d}{dt} x(t) \rightarrow j\omega X(\omega)$  all'incirca

### La risposta impulsiva del filtro passa alto

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

### Il filtro passa-alto come derivatore



derivatore ideale

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \approx j2\pi fRC$$

Cioè la derivata della parte in pulso del filtro passa-basso

### Filtri passa-banda

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{j2\pi fRC}{1 - (2\pi f)^2 LC + j2\pi fRC}$$

al tempo per un...

$$|H(f)| = \frac{2\pi |f| RC}{\sqrt{\{1 - (2\pi f)^2 LC\}^2 + (2\pi fRC)^2}}$$

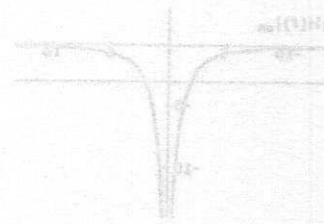
parte per il quadrato parte per il quadrato

Filtri passa-alto

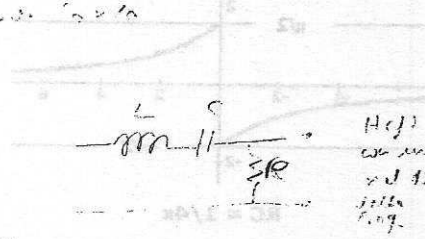


$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$

$$|H(f)| = \frac{2\pi |f| RC}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$



... derivatore ideale e ... La costante di tempo ...



H(f) si calcola con una parte ...

Frequenza di taglio

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

La banda passante è quella compresa tra f1 e f2  
La banda opaca è quella compresa tra f1 e f2

Per caratterizzare i filtri passa-banda si introducono due parametri:  $f_0$  che è la frequenza di risonanza,  $Q$  che è il fattore di merito.

### Filtri passa-banda

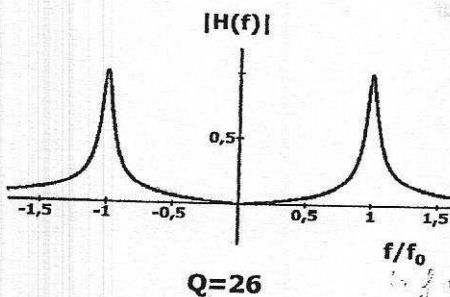
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

*da cui si trova l'ordine di RC*

$$RC = \frac{2\pi f_0 LC}{Q} = \frac{2\pi f_0}{Q} \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = \frac{1}{2\pi f_0 Q}$$

$$|H(f)| = \frac{\left| \frac{f}{f_0 Q} \right|}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{f}{f_0 Q}\right)^2}}$$

*modello della funzione di trasferimento*



A lato l'andamento delle risposte in frequenza del filtro.

Sulla frequenza di risonanza è come avere un corto circuito sullo linee di serie, induttanza e condensatore.

Sulla frequenza di risonanza  $f_0$  tutto il segnale viene applicato sull'uscita.

### Larghezza di banda a 3dB

$$1 - \left(\frac{f^*}{f_0}\right)^2 = \frac{f^*}{f_0 Q}$$

$$f_0^2 - f^{*2} = (f_0 - f^*)(f_0 + f^*) = \frac{f^* f_0}{Q}$$

*da cui si trova*

$$(f_0 - f^*) = \frac{B}{2}$$

$$f^* = (f_0 - B/2)$$

se  $B \ll f_0$

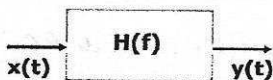
$$f^* \approx f_0$$

$$f_0 B = \frac{(f_0)^2}{Q}$$

$$\frac{B}{f_0} = \frac{1}{Q}$$

La banda frazionale è l'inverso del fattore di merito

## Filtro adattato



Filtro che rende massimo il rapporto  $\frac{|y(t_0)|^2}{N_{out}}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \quad N_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 df$$

$$\frac{|y(t_0)|^2}{N_{out}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 df}$$

## Disuguaglianza di Schwartz

$$\frac{|y(t_0)|^2}{N_{out}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

$$\frac{|y(t_0)|^2}{N_{out}} \leq \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = 2 \frac{E_x}{\eta}$$

Il segno di uguaglianza vale quando:

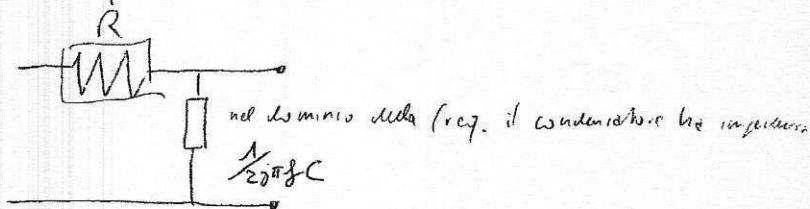
$$H(f) = kX^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

$$h(t) = kx^*(t_0 - t)$$

$$y(t) = k x(t) * x^*(t_0 - t) = k R_{xx}(t - t_0)$$

nota

Filtro passa-basso da 05:46 a 06:27



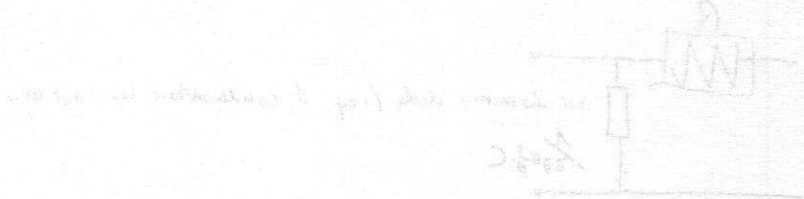
La funzione di trasferimento  $H(f)$  è ottenuta facendo la partizione tra i due dispositivi

$$H(f) = \frac{\frac{1}{j2\pi f C}}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

La funzione  $H(f)$  viene caratterizzata attraverso l'andata del modulo e fase.

Per capire le capacità selettive, cioè il comportamento in frequenza del circuito deve essere analizzato il modulo di  $H(f)$ .

Filter pass band 2000 Hz



La fonction de transfert  $H(f)$  est définie par le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée.

$$H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

La fonction  $H(f)$  nous donne l'amplitude et la phase de la tension de sortie en fonction de la fréquence. Pour savoir le comportement du filtre, il faut regarder les courbes de la magnitude et de la phase.

## LEZ. 20 - IL CAMPIONAMENTO

Il campionamento di un segnale rappresenta la lettura del valore che il segnale assume in opportuni istanti di tempo.

Si effettua il campionamento per avere una rappresentazione numerica del segnale, più idonea ad essere oggetto di elaborazioni per mezzo di un calcolatore.

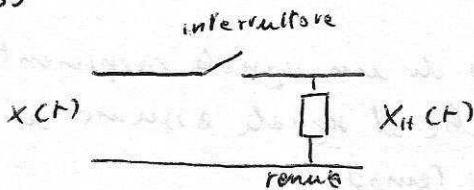
Si rende però necessario che la sequenza dei campionamenti sia in grado di rappresentare l'intera informazione contenuta nel segnale e occorre valutare sotto quali condizioni tali rappresentazioni possono essere considerate accettabili.

### • CAMPIONAMENTO di un SEGNALE

Esso può avvenire per mezzo di un circuito, detto di utilizzazione, che ha un interruttore in serie sulla via del segnale. L'uscita del circuito è un andamento a gradini che rappresenta il segnale campionato e tenuto; la funzione di campionamento è un treno periodico di impulsi di Dirac.

Il segnale campionato, nella sua espressione analitica, sarà oggetto di trattazione con la sua trasformata di Fourier.

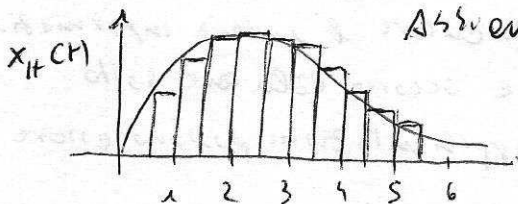
Un circuito per il campionamento del segnale e del rps



Il circuito di tenuta ha il compito di mantenere costante il livello del segnale per

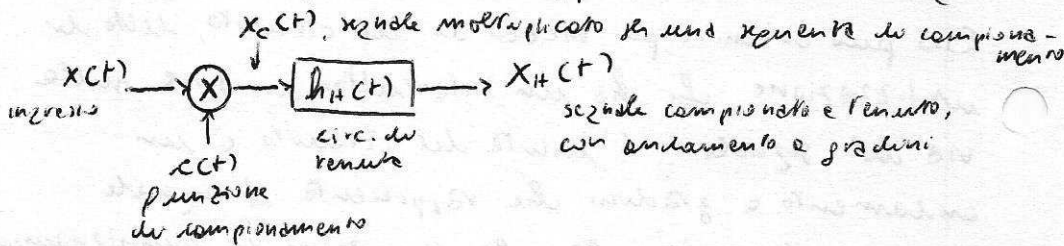
Il circuito di tenuta ha memoria dell'ultimo segnale inviato in ingresso, dopo che si è aperto l'interruttore.

il tempo che passa tra due campionamenti successivi.



Abbiamo una successione di gradini.

Lo schema sopra serve per poter analizzare i segnali: esso può essere rappresentato come segue:



$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$

la sequenza di campionamento è un treno periodico di impulsi di Dirac

$$h_H(t) = \text{rect}_{T_c}(t - T_c/2)$$

rettangolo di durata  $T_c$ , pari dell'intervallo di campionamento



Questo è costante di definire il segnale campionato, come il prodotto tra il segnale di ingresso e la sequenza di campionamento.

$$x_c(t) = x(t) \cdot c(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$

Poiché  $x(t)$  è costante rispetto all'indice di somma, può essere portato nella sommatoria, quindi

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - kT_c),$$

da cui

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c),$$

area degli impulsi
spostamento degli impulsi di Dirac

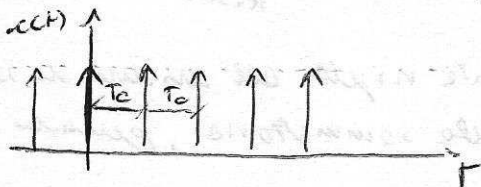
Segnale campionato è una sequenza di infiniti impulsi di Dirac spostati tra di loro di una quantità temporale  $T_c$  uno rispetto all'altro, e di area  $x(kT_c)$ , ognuno. Essi hanno, come area, il valore del segnale negli istanti dove gli impulsi sono applicati.

Si passa a  $x(kT_c)$ , da  $x(t)$ , in quanto gli impulsi di Dirac sono diversi da zero solo negli istanti di tempo in cui sono applicati, ovvero nell'istante  $kT_c$ .

Questo ci permette di andare a vedere sotto quali condizioni possiamo utilizzare il segnale

campionati, ovvero sotto quali condizioni non abbiamo perdita di informazione.

Il segnale di campionamento,  $c(t)$  è graficamente come in figura, formato da un finita impulsi,



ripetuta da una quantità  $T_c$ .

Dunque  $c(t)$  è un segnale periodico.

Essendo  $c(t)$  un segnale periodico, possiamo lo sviluppare in serie di Fourier, che è:

$$c(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} e^{j 2\pi f_m t} \quad \text{in cui}$$

Sezione campionata  $\leftarrow$  coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier,  $c_k$ .

$\frac{1}{T_c}$  è il coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier della sequenza.

Infatti si ricorda che il coefficiente di Fourier,  $c_k$ , è il reciproco del periodo della funzione periodica moltiplicato per la trasformata di Fourier di quella che è all'interno di un periodo della funzione. In questo caso, all'interno di un periodo della funzione, ad es. un intorno a 0, abbiamo solo un impulso di Dirac, la cui trasformata di Fourier è 1, quindi il coefficiente dello sviluppo di Fourier è:

$$c_k = \frac{1}{T_c} \cdot 1 = \frac{1}{T_c}$$

Dallo sviluppo in serie del segnale campionato  $x_c(t)$ , possiamo determinare il segnale campionato  $x_c(t)$ , che è dunque

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} e^{j2\pi f \frac{m}{T_c}} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} \cdot x(t) \cdot e^{j2\pi f \frac{m}{T_c}} \end{aligned}$$

che è un'altra espressione del segnale campionato, oltre a quella con gli impulsi di Dirac.

L'esponenziale rappresenta la frequenza  $\frac{m}{T_c}$ ; ricordando le proprietà di traslazione in frequenza della Trasformata di Fourier, si può scrivere  $\bar{X}(f)$ , la Trasformata di Fourier del segnale campionato, ovvero lo spettro del segnale campionato. Abbiamo dunque

$$\bar{X}_c(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} \bar{X}\left(f - \frac{m}{T_c}\right)$$

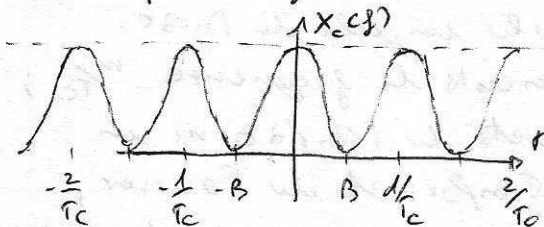
Per cui lo spettro del segnale campionato è la somma di infinite repliche dello spettro del segnale non campionato opportunamente graduate. Le repliche sono traslate; il passo è  $\frac{1}{T_c}$ . Il segnale non campionato è il segnale di partenza questo significa a coprire con questo spettro.

Supponiamo che  $\bar{X}(cf)$  sia limitato  
 e una banda  $B$ , pari a  $1/2T_c$ ,  
 ovvero la metà del doppio della durata  
 del periodo di campionamento.

Se  $\bar{X}(cf)$  è limitato in una banda  $B$  pari a  $1/2T_c$ ,  
 allora

$$|X_{cf}| = 0 \text{ per } |f| > 1/2T_c$$

e le repliche spettrali sono tra loro separate



Quando lo spettro  
 va da  $-B$  a  $B$ .

Esso è così limitato e  
 tale intervallo di  
 frequenze.

Per cui lo spettro è  
 nullo,  $|X_{cf}| = 0$  al

di fuori dell'intervallo,  $|f| > 1/2T_c$ .

Siccome stiamo replicando lo spettro di  
 quantità pari a  $1/T_c$ ,  $2/T_c$ ,  $3/T_c$ , allora  
 accade che lo spettro del segnale campionato, a  
 parte un coefficiente di ampiezza  $1/T_c$ , è  
 quello indicato nella figura sopra, in cui a  
 varie portate dello spettro non si sovrappongono  
 mai, per la condizione che abbiamo posto.

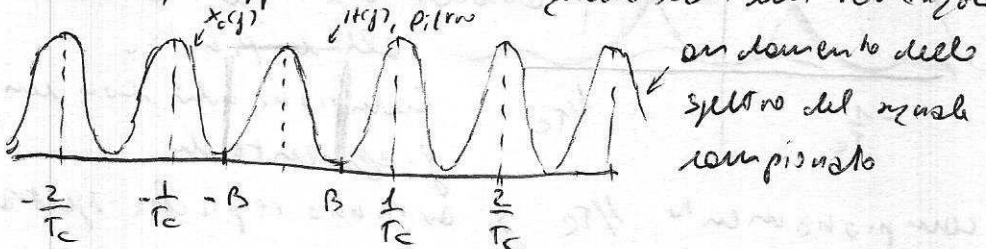
In questo caso si dice che non c'è aliasing  
 e si intende che lo spettro è recuperabile

In caso di aliasing, come in figura, abbiamo un fenomeno di sovrapposizione, in quanto lo spettro è più grande. Poiché il campionamento

va a replicare lo spettro, la banda si sovrappone parzialmente.

Il segnale campionato  $x_c(f)$ , con uno spettro periodico, si va a sovrapporre soltanto parzialmente allo spettro del segnale di partenza, per cui esistono delle zone di frequenza in cui i due segnali non si sovrappongono, così non si copiano. Questo significa che parte qualcosa nel tempo ~~non viene~~ non potrà indietro, cioè lo spettro del segnale originario non è recuperabile.

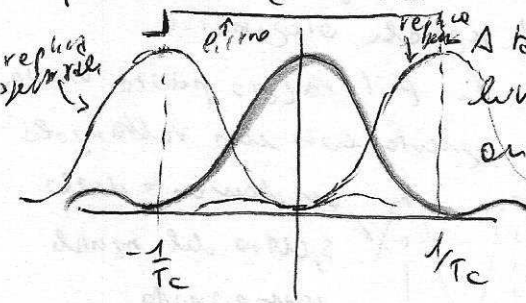
Quando, in assenza di aliasing sarà possibile ritornare allo spettro del segnale originario attraverso una operazione di filtraggio passa basso ideale, rappresentata da un rettangolo



$$H(f) = T_c \text{rect}_{1/T_c}(f) = T_c \text{rect}_{2B}(f)$$

Da  $-B$  a  $B$  lo spettro non ha subito alterazioni. Considerando un filtro, che compensi la ampiezza e che faccia passare inalterate le frequenze che vanno da  $-B$  a  $B$ , diciamo che all'uscita del filtro otteniamo il segnale di potenza  $B$  dunque possibile recuperare il segnale di ingresso.

Abbiamo imposto una rigorosa limitazione di ampiezza di banda, ma purtroppo, a uguale limitazione in tempo corrisponde un'occupazione spettrale infinita, come si evince dalla Teoria di Fourier. Dunque la non limitazione di uno spettro di un segnale fa sì che nella banda del filtro di interpolazione (il filtro rettangolare che serve a recuperare il segnale) si trovano non solo le componenti di bassa frequenza, <sup>quelli che vogliamo</sup> ma anche componenti a frequenza più alta che sono state "ripiegate" in basso e così proprio delle repliche dello spettro del segnale causate dal campionamento.



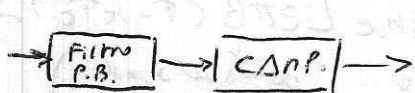
A tal fine, in caso un segnale limitato in tempo con un andamento, periodico che va all'infinito.

Campionando con una frequenza di campionamento  $1/T_c$  si avranno repliche spettrali, come in figura. Cercando di recuperare

una certa zona dello spettro, con un filtro, si troveranno le componenti di bassa frequenza (vicine allo 0), del segnale originale, ma anche le componenti che derivano dalle altre repliche spettrali.

Quindi il fatto che un segnale limitato in tempo non possa avere una limitazione in banda rappresenta un problema.

La soluzione è quella di far precedere al dispositivo campionatore un filtro passa basso che limita la banda del segnale.



Ad esempio, nel caso del segnale vocale, è un po' come abbreviare una banda di 4 kHz.

Però, per procedere con un filtro che abbia 4 kHz di banda, un modo da tagliare tutte le componenti al di sopra dei 4 kHz e poter ritenere il segnale originariamente limitato in banda e quindi poter procedere all'operazione di campionamento ed eventualmente di ricostruzione del segnale.

Quindi un primo problema è quello di non avere segnali limitati in banda.

L'altro problema è che il filtro di interpolazione  $H(f)$  non rispetta il principio di causalità, in quanto ha una risposta del tipo  $\sin x/x$ .

Quindi la funzione di trasferimento, ovvero la risposta in frequenza, dovrà essere modificata.

e quindi lo spettro del segnale in uscita non sarà uguale a quello del segnale in ingresso, per cui anche questo problema dovrà essere contrastato.

### • TEOREMA del CAMPIONAMENTO

Per segnali limitati alla banda  $B$  (tali cioè che il loro spettro sia diverso da 0 solo nell'intervallo di frequenze  $-B, B$ ) vale il seguente sviluppo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \operatorname{sinc} [2\pi B (t - kT_c)]$$

↓  
il segnale

↓  
i campioni

↓  
la funzione  
interpolante

↓  
banda del segnale  
intervallo di  
campionamento

con  $T_c \leq \frac{1}{2B}$ , ovvero la frequenza di campionamento deve essere due volte maggiore la banda del segnale

Dimostrazione:

I campioni del segnale, rilevati con una frequenza opportuna legata alla banda del segnale da integrare, contengono tutta l'informazione contenuta nel segnale, che può essere ricostruito interpolando attraverso la funzione  $\operatorname{sinc}(2\pi B t)$ .



$$x(t) = x_e(t) * h(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c) * \text{sinc}(2\pi Bt)$$

Il segnale si ottiene come convoluzione tra il segnale campionato e il filtro.

La trasformata di Fourier del filtro rettangolare, posta nelle ideali è  $\text{sinc}(2\pi Bt)$ ; inoltre la convoluzione con  $\text{sinc}$  è ancora la  $\text{sinc}$ , tralata nel punto di applicazione dell'impulso di Dirac.

Dunque, come volevasi dimostrare

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \text{sinc}[2\pi B(t - kT_c)]$$

Si dimostra che questa relazione, espressione del teorema del campionamento, è valida per tutti i segnali (di energia e quindi trasformabili <sup>nel senso di Fourier</sup>, o di potenza), purché limitati in banda.

Si può dunque rappresentare il segnale di qualsiasi natura, solamente attraverso ai suoi campioni.

L'espressione sopra è di fondamentale importanza perché consente di associare al segnale le sequenze

delle finite e infinite (dipende dalle  
approssimazioni fatte) dei campioni.

Conoscendo il valore dei campioni, e  
consentito rappresentare il segnale soltanto  
attraverso le sequenze e, una volta convertita  
i campioni, per esempio, in digitale,  
utilizzarlo come ingresso alle cosiddette  
elaborazioni numeriche dei segnali.

La formula del teorema del campionamento

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \operatorname{sinc} [2\pi B (t - kT_c)]$$

ci dice che negli istanti di campionamento solo uno degli infiniti addendi è diverso da zero, mentre in tutti gli altri istanti di tempo tutti gli addendi danno un contributo. Questo contributo tende a diventare sempre più piccolo nell'allungarsi dell'istante considerato, a causa dell'andamento della funzione  $\operatorname{sinc}(x)$ .

Nell'istante di campionamento c'è soltanto il campione, negli altri istanti di tempo bisogna andare ad interpolare con le funzioni  $\operatorname{sinc}(x)$ .

Lo sviluppo di campionamento è uno sviluppo in serie di funzioni ortogonali che risulta essere completo per segnali limitati in banda.

Questo ci consente di capire, ricorrendo alla teoria di Fourier, a quale numero di addendi dobbiamo limitare lo sviluppo di somme da  $k$  da  $-\infty$  a  $\infty$ . Lo sviluppo è uno sviluppo in serie di funzioni ortogonali, facilmente dimostrabili, prendendo il prodotto <sup>scalare</sup> di due funzioni di indice diversi,  $k$  e  $h$ , e applicando il teorema di Parseval si può corrispondere al prodotto scalare quello delle trasformate.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2\pi B(t - kT_c)] \cdot \text{sinc}[2\pi B(t - hT_c)] dt$$

indice  $k$ 
indice  $h$

↓
↓

Parseval
↓
↓

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2B} \text{rect}_{2B}(f) e^{j2\pi f k T_c} \cdot \frac{1}{2B} \text{rect}_{2B}(f) e^{-j2\pi f h T_c} df$$

Quest'ultimo integrale, ottenuto per applicazione del teorema di Parseval (vd. Lec. 12), può essere limitato da  $-B$  a  $B$ , poiché presente nella rect.

Dunque abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4B^2} \text{rect}_{2B}(f) e^{j2\pi f (k-h)T_c} df =$$

$$\int_{-B}^B \frac{1}{4B^2} \underbrace{e^{j2\pi f (k-h)T_c}}_{\text{si sviluppa in}} df = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ \frac{1}{2B} & \text{se } h = k \end{cases}$$

intervallo di campionamento

combinazioni lineari di seni e coseni

Con questo è dimostrato che le funzioni con cui stiamo sviluppando il segnale sono tutte delle funzioni ortogonali, per cui possiamo usare tutte le regole degli sviluppi in serie delle funzioni ortogonali per valutare eventualmente gli errori e per definire il numero di campioni per interpolare correttamente il segnale che vogliamo ricostruire.

- Diverse sequenze di campionamento cioè non si compiono con impulsi di Dirac, ma una sequenza periodica di impulsi rettangolari

Si considera come sequenza di campionamento  $x(t)$  una sequenza periodica di impulsi rettangolari, non di impulsi di Dirac, sufficientemente corti, dalla quale ricaviamo lo sviluppo in serie di Fourier.

In esso il coefficiente non è  $1/T_c$  ma è  $1/T_c \cdot A \cdot \Delta \operatorname{sinc}(\pi \frac{m}{T_c} \Delta)$ , che è il valore dei coefficienti di Fourier della forma d'onda.

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}_{\Delta}(t - kT_c), \text{ con } \Delta \ll T_c$$

Lo sviluppo in serie di Fourier di  $x(t)$  è

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T_c} A \Delta \operatorname{sinc}(\pi \frac{m}{T_c} \Delta)}_{\substack{\text{coeff. dello sviluppo,} \\ \text{prima, col Dirac, ora solo} \\ 1/T_c}} e^{j2\pi f \frac{m}{T_c}} \underbrace{\frac{m}{T_c}}_{\substack{\text{frequenze} \\ \text{corrispondenti} \\ \text{ai diversi} \\ \text{campioni}}}$$

Lo spettro del segnale campionato,  $X_c(f)$ , è:

$$X_c(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} A \Delta \operatorname{sinc}(\pi \frac{m}{T_c} \Delta) \cdot X(f - \frac{m}{T_c})$$

Nello spettro del segnale campionato compaiono sempre delle repliche,  $X(f - \frac{m}{T_c})$ ; esse non sono più tutte pari allo stesso modo, ma con dei coefficienti che, all'aumentare di  $m$ , diventano

più piccoli.

Il campionamento non è dunque legato alla presenza di impulsi di Dirac, ma è legato a una certa struttura operativa, in cui un ruolo fondamentale è giocato dallo periodicità della forma d'onda di campionamento.

Il filtro passa basso ideale consente di ottenere lo stesso spettro del segnale di ingresso a meno di una costante moltiplicativa che è sotto la nostra diretta gestione attraverso operazioni semplici, di tipo analogico e numerico.

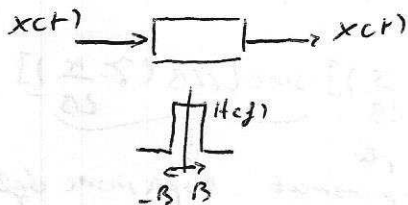
Il teorema del campionamento ha validità più generale ed è possibile estenderlo anche a segnali di potenza, per i quali non si può parlare di spettri di ampiezza e  $P(f)$ , perché sono limitati in banda, perché il teorema del campionamento è stato dimostrato usando uno sviluppo in serie di Fourier, e quindi si è pensato di trasferire un spettro di un segnale. Per cui abbiamo implicitamente ammesso che i segnali ovvero sono spettrali, quindi possono segnali di energie e Fourier trasformabili.

È dunque intuitivo che il teorema del campionamento possa essere valido anche per segnali di potenza, per

in cui non si può parlare di spettro di ampiezza e di fase, ma è necessario che tali segnali di potenza siano limitati in banda.

- Segnali limitati alla banda  $B$  [32; 54]  
Sono segnali che hanno la proprietà di emergere inalterati da un filtro la cui funzione di trasferimento sia unitaria nella banda estesa da  $-B$  a  $B$ .

Abbiamo dunque il concetto per cui un segnale  $x(t)$



entra in un filtro che risponde unitariamente nella banda che va da  $-B$  a  $B$ .  
Se il segnale è limitato a tale banda allora quello che esce è  $x(t)$ .

Il concetto è quello di limitazione in banda.

Dunque possiamo dire che il segnale è dato dalla convoluzione tra il segnale e la risposta impulsiva del filtro, cioè e sviluppare l'espressione; cioè

$$x(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

La risposta impulsiva  $h(t)$  è:

$$h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt), \text{ ed è approssimamente limitato in banda.}$$

Poiché  $h(t)$  è rigorosamente limitato in banda, ad esso è possibile applicare nella maniera più assoluta il teorema del campionamento.

Possiamo dunque immaginare di campionare il segnale  $h(t - \tau)$ , in cui la variabile è  $\tau$ .

La funzione posta all'interno dell'integrale di convoluzione è  $\text{sinc}[2\pi B(t - \tau)]$ , che essa può essere campionata, in quanto tale segnale è sicuramente limitato in banda e dunque trasformabile. Per il teorema del campionamento possiamo scrivere

$$\text{sinc}[2\pi B(t - \tau)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \cdot \text{sinc}\left[2\pi B\left(\tau - \frac{k}{2B}\right)\right]$$

questi sono gli  
istanti di campionamento

↓  
espressione della  
funzione di  
interpolazione

In riferimento all'espressione della funzione di interpolazione, si ricorda che le funzioni  $\text{sinc}(x)/x$ ,  $\text{sinc}(cx)$ , sono simmetriche rispetto al massimo, e il massimo è nella posizione  $k/2B$ ; quindi con un semplice artifizio matematico, possiamo scrivere al posto di  $\text{sinc}(cx)$ ,  $\text{sinc}(-x)$ .  
Dunque quello che otteniamo è

$$\text{sinc}[2\pi B(t - \tau)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \cdot \text{sinc}\left[2\pi B\left(\frac{k}{2B} - \tau\right)\right]$$

ed è una espressione ricavata direttamente dal teorema



del campionamento.

Questo risultato lo mettiamo nell'integrale di convoluzione che definisce l'uguaglianza del segnale con l'uscita del filtro limitato in banda.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) 2B \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \text{sinc}\left[2\pi B\left(\frac{k}{2B} - \tau\right)\right] d\tau$$

Sfruttando la linearità, invertiamo le operazioni di somma e di integrale, quindi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) 2B \cdot \text{sinc}\left[2\pi B\left(\frac{k}{2B} - \tau\right)\right] d\tau$$

Troviamo l'espressione uguale a quella che definisce l'uscita del filtro considerato per valutare la limitazione in banda del segnale.

Tale espressione è il valore del segnale

calcolato negli istanti  $k/2B$ , ovvero  $x(k/2B)$ .

Di nuovo abbiamo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right]$$

Abbiamo dunque trovato l'espressione di quello che abbiamo chiamato il teorema di campionamento.

Cioè abbiamo che il segnale  $x(t)$  è uguale

alla sommatoria di infiniti addendi in cui

compaiono il campione  $x\left(\frac{k}{2B}\right)$  e la interpolazione  $\text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right]$ .

Possiamo quindi concludere semplicemente imponendo una posizione, ovvero

$$\text{ponendo } 2B = 1/T_c$$

che è la stessa condizione precedentemente ricavata dalla analisi degli spettri del segnale campionato.

Con questa posizione possiamo scrivere che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \text{ sinc} [2\pi B (t - kT_c)]$$

che è l'espressione del teorema del campionamento. Tale espressione vale per tutti i segnali, di energie e di potenza, purché limitati in banda.

→ trasformabile      → non trasformabile

Si può dunque rappresentare il segnale, di qualsiasi natura, solamente attraverso i suoi campioni.

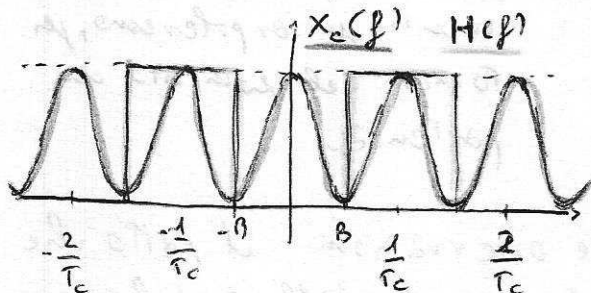
L'espressione sopra è di fondamentale importanza perché consente di associare al segnale la sequenza delle finite o infinite (dipende dalle approssimazioni che faremo) dei campioni.

Quando conoscendo i valori dei campioni, è conveniente rappresentare il segnale soltanto attraverso la sequenza e una volta convertita in campioni, gli esempi in digitale, utilizzando come ingresso alle cosiddette elaborazioni numeriche dei segnali.

# • Applicazioni del campionamento

• Il campionamento e la modulazione prodotti  
Una prima importante applicazione è legata al fatto che lo spettro di un segnale campionato contiene delle repliche del segnale di partenza.

Si ricorda che era possibile, scrivendo lo spettro di un segnale campionato, trasformare ~~deba una~~  
ovvero una espressione in cui c'era il segnale nella sua banda di partenza e tante repliche.



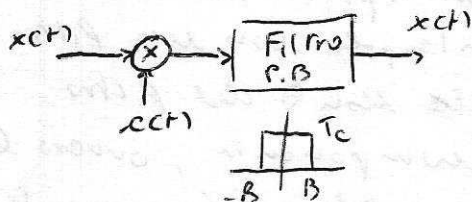
Il risultato è avere lo spettro del segnale originale in fase.

prima replica spettrale, con un filtro intorno al esid. filtro passa banda, non passa tutto.

La logica del teorema del campionamento è quella di affermare che se filtriamo il segnale campionato,  $X_c(f)$ , nella regione della banda propria (da  $-B$  a  $B$ ), che lo genera,

si può risalire al segnale di partenza.

Prendere un segnale  $x(t)$ , campionarlo con un segnale campionario

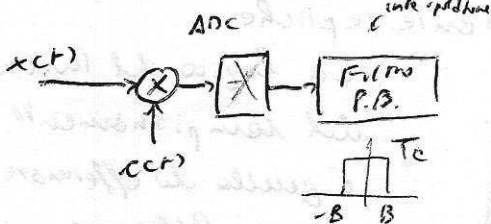


segnale campionario  $x_c(t)$ , filtrarlo con un filtro passa basso, con la risposta in frequenza e solo, per ottenere di nuovo  $x_c(t)$ , non ha un unico operatore, ma dimostra che, attraverso

non ha un unico operatore, ma dimostra che, attraverso

l'operazione di campionamento in unidirezionale  
una operazione complementare, inversa, che ci  
permette di ricostruire il segnale.

È chiaro che l'operazione di interpolazione sarà  
una operazione che interverrà nel momento in cui,  
dopo una certa elaborazione che è intervenuta  
sul segnale, volessimo ritornare nella stessa banda  
di partenza. Quindi campioneremo, poi converteremo  
probabilmente in digitale, elaboreremo, torneremo in  
analogico ed eventualmente interpoleremo, per  
torinare nel dominio di  
partenza.



Al di là di queste osservazioni, il fatto che  
il segnale campionato possiede delle repliche  
spettrali ci fa pensare al poter realizzare  
un'altra operazione fondamentale nel trattamento  
dei segnali che è la modulazione, ovvero  
la traduzione in frequenza di uno spettro,  
che è una delle proprietà che può avere la trasformata  
di Fourier.

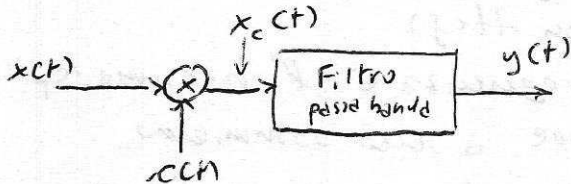
Quindi, se invece di interpolare con un  
filtro passa basso, si interpola con un filtro  
passa banda, allora alla uscita del filtro  
avremo soltanto due componenti, ovvero lo  
spettro del segnale che è stato opportunamente

traslato in frequenza.

Il filtro passa banda nella figura sottostante è realizzato per effettuare l'operazione di filtraggio intorno alla prima replica spettrale ( $1/T_c$ ), una tale operazione può essere fatta intorno a qualsiasi replica spettrale.

Dunque, se invece di un filtro di interpolazione passa basso, si usa un filtro interpolante passa banda l'uscita sarà un segnale modulato d'ampiezza; la modulazione è la traslazione in frequenza di uno spettro, dunque all'uscita avremo lo spettro del segnale traslato in frequenza.

Lo schema di circuito detto è il seguente,

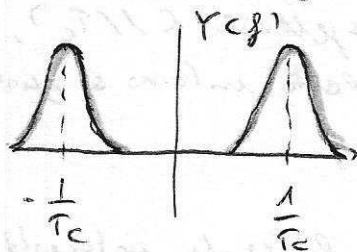


in cui all'uscita avremo un segnale  $y(t)$ , che non è più la replica del segnale trasmesso.

La funzione di trasferimento del filtro sarà fatta da due rettangoli con larghezza di banda  $2B$ , centrati sulle frequenze  $h/T_c$  e  $-h/T_c$ , per tener conto della simmetria dell'operazione.

$$H(f) = \frac{T_c}{2} \text{rect}_{2B} \left( f - \frac{h}{T_c} \right) + \frac{T_c}{2} \text{rect} \left( f + \frac{h}{T_c} \right)$$

Lo spettro che si ottiene, per  $h=1$ , la prima replica spettrale (ma il filtro può essere centrato su qualsiasi frequenza  $h/T_c$ ), e



Il risultato è una operazione di traduzione dello spettro, intorno alla frequenza che corrisponde proprio alla modulazione di semplicità.

Dal punto di vista analitico la trasformata dell'uscita,  $Y_c(f)$  è il prodotto dello spettro campionato  $X_c(f)$ , quello vero periodico del campionamento, con  $H_c(f)$ .

Il risultato in frequenza è l' $h$ -esima replica su frequenza positive, e la sommatoria l' $h$ -esima replica su frequenza negative.

$$Y_c(f) = \bar{X}_c(f) \cdot H_c(f) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} X(f - \frac{m}{T_c}) \left[ \frac{T_c}{2} \text{rect}_{\text{BS}}(f - \frac{h}{T_c}) + \frac{T_c}{2} \text{rect}_{\text{LB}}(f + \frac{h}{T_c}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} X(f - \frac{h}{T_c}) + \frac{1}{2} X(f + \frac{h}{T_c}), \text{ e, analiticamente}$$

$y(t) = x(t) \cos(2\pi \frac{h}{T_c} t)$ , l'uscita del sistema.

Quindi quello che è stato realizzato è una modulazione di ampiezza, ma anche ~~modulazione~~ omoduna o anche modulazione prodotto.

Quindi il campionamento, con questa sua disponibilità delle repliche spettrali, permette molte operazioni di gestione e trattamento dei segnali.

Tali repliche spettrali era già stata vista per il segnale Fourier trasformabile, cioè per i cosiddetti segnali di energia.

Per quanto riguarda i segnali di potenza, è interessante spettro di qualcosa di analogo e cioè che anche lo spettro di densità di potenza di un segnale di potenza venga trattato.

- Spettro di densità di potenza di un segnale di potenza campionato

Per calcolare lo spettro di densità di potenza è necessario calcolare l'autocorrelazione del segnale campionato.

Per il teorema di Wiener lo spettro di densità di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione del segnale campionato,

non si può operare direttamente nel tempo.

L'autocorrelazione  $R_{cc}(\tau)$  del segnale campionato  $x_c(t)$

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \underbrace{x_c^*(t)}_{\text{segnale campionato coniugato}} \cdot \underbrace{x_c(t+\tau)}_{\text{segnale campionato, calcolato traslato}} dt$$

Per i calcoli si sostituisce a  $x_c(t)$  la sua espressione campionata; il segnale campionato è la somma degli infiniti campioni moltiplicata per impulso di Dirac, dove i campioni sono stati calcolati.  
Quindi

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(nT_c) \delta(t-nT_c)}_{\text{espressione del segnale campionato}} \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_c) \delta(t-mT_c+\tau)}_{\text{espressione del segnale campionato, con traslazioni } \tau, \text{ variabile che delimita il campionamento in tempo della autocorrelazione}} dt$$

Tale espressione può essere riorganizzata sfruttando le linearità delle operazioni di integrazione e di somma e quindi

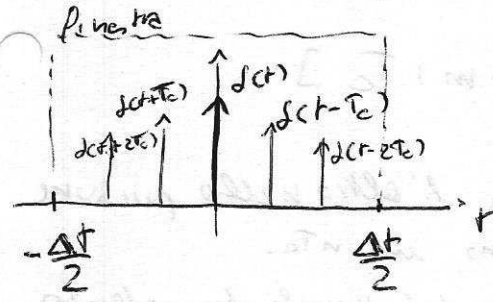
si sposta l'operatore dell'integrale tutto ciò che non dipende dal tempo. Quindi abbiamo

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(nT_c) \cdot x(mT_c) \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t-nT_c) \delta(t-mT_c+\tau) dt$$



Si osserva che entrambe le sommatorie sono estese da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ma l'integrale è limitato a un intervallo  $\Delta t$  e va da  $-\Delta t/2$  a  $\Delta t/2$ .

Di conseguenza la sequenza dei campioni  $s(t - nT_c)$  sarà, soltanto in un numero limitato, un contributo al calcolo, perché si tratta di aver incluso dentro una finestra temporale che va da  $-\Delta t/2$  a  $\Delta t/2$ ,



con  $N$  campioni che, a un certo punto, escono dalla finestra.

Non saranno infiniti i campioni e il loro contributo all'integrale, ma sono una

quantità finita. Inducendo con  $N$  tale quantità di numero di campioni all'interno della finestra di durata  $\Delta t$ .

Avendo fatto questa osservazione e avendo limitato il numero dei campioni, possiamo estendere tranquillamente l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Così facendo si riconduce l'integrale a una forma che si può riconoscere una correlazione di impulso di Dirac. Di conseguenza

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \sum_{N(\Delta t)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(nT_c) x(mT_c) \int_{-\infty}^{\infty} s(t - nT_c) s(t - mT_c + \tau) dt$$

Abbiamo dunque sostituito un indice infinito sulla somma e un indice finito sull'integrale con un numero finito di campioni sulla somma e estendendo l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Dunque, considerando l'integrale assieme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c) \delta(t - mT_c + \tau) dt = \\ = \delta[\tau + (n - m)T_c]$$

In pratica un Dirac legge l'altro nelle posizioni in cui è applicato il primo, in  $nT_c$ .

Dunque l'autocorrelazione del segnale di potenza campionato è il limite seguente:

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \sum_{N\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(nT_c) x(mT_c) \cdot \delta[\tau + (n - m)T_c]$$

Possiamo indicare  $N\Delta t$  con  $N$ , quindi  $N\Delta t = N$ .

Possiamo inoltre osservare che

$\Delta t = NT_c + \epsilon$ , cioè l'intervallo rispetto al quale stiamo operando l'operazione di limite è stato da  $N$  volte l'intervallo di campionamento  $T_c$  più una quantità  $\epsilon$  che sarà sicuramente positiva e minore di  $T_c$ , cioè  $\epsilon$  è sicuramente una quantità limitata.

Quindi, per  $\Delta t \rightarrow \infty$ ,  $N$  cresce, ma è  
 su posto considerare trascurabile, per cui abbiamo

$$R_{cc}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N T_c} \sum_N \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(n T_c) x(m T_c) \delta[\tau + (n-m) T_c]$$

ovvero

$$R_{cc}(\tau) = \frac{1}{T_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N x^*(n T_c) x(m T_c) \delta[\tau + (n-m) T_c]$$

ponendo  $m-n = k$  abbiamo

$$R_{cc}(\tau) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N x^*(n T_c) x(n+k T_c) \right] \delta(\tau - k T_c)$$

Si arriva alla relazione

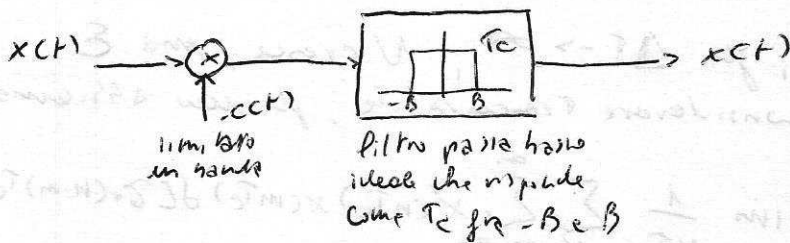
$$R_{cc}(\tau) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) \delta(\tau - k T_c), \text{ che}$$

è una autocorrelazione di un pulso di Dirac,  
 opportunamente pesato, con

$$\rho(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N x^*(n T_c) x(n+k T_c)$$

ha un significato particolare

Possiamo fare una osservazione, legata allo  
 schema di riferimento, cioè visto, ripetere.



Dallo schema sopra, l'uscita del filtro di interpolazione è il segnale stesso di ingresso.

La convoluzione tra  $R_{cc}(t)$  e l'autocorrelazione della risposta impulsive del filtro di interpolazione è uguale alla autocorrelazione del segnale stesso.

uguale all'autocorrelazione del segnale di ingresso stesso e l'autocorrelazione del segnale di uscita è l'autocorrelazione del segnale di ingresso.

$$R_{xx}(\tau) = R_{cc}(\tau) * R_{hh}(\tau)$$

$$R_{hh}(\tau) = T_c \operatorname{sinc}(2\pi B \tau) \quad \text{filtro passa basso ideale}$$

L'autocorrelazione dell'uscita è dunque

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p(k)) T_c \operatorname{sinc}[2\pi B(\tau - kT_c)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p(k)) \operatorname{sinc}[2\pi B(\tau - kT_c)]$$

Per cui

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(kT_c) \operatorname{sinc}[2\pi B(\tau - kT_c)]$$

Questa espressione è esatta una formulazione

del teorema di campionamento scritto direttamente nell'autocorrelazione

$$R_{cc}(\tau) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(kT_c) \delta[\tau - kT_c]$$

Daunque lo spettro di densità di potenza del segnale campionato,  $X_{cc}(f)$ , è ottenibile trasladando intorno ai multipli dello periodo di campionamento lo spettro di densità di potenza del segnale non campionato  $X_{xx}(f)$

Perché questo è l'applicazione e la situazione del teorema del campionamento, che dimensionalmente è come se si sommasse direttamente nell'autocorrelazione.

Analiticamente quello che succede è

$$R_{cc}(\tau) = R_{xx}(\tau) \cdot \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_c) = R_{xx}(\tau) \frac{1}{T_c} \cdot \dots$$

$$X_{cc}(f) = X_{xx}(f) + \frac{1}{T_c} C(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{xx}\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

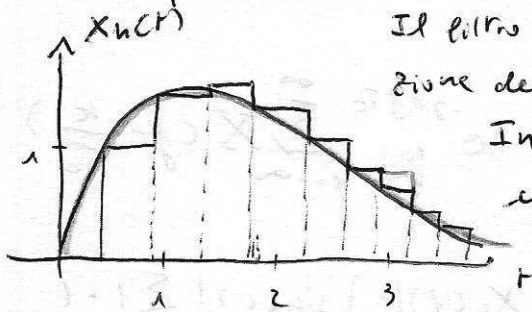
Lo spettro di densità di potenza del segnale campionato si esprime, attraverso un fattore di normalizzazione, come la traslazione dello spettro <sup>di densità di potenza</sup> del segnale non campionato. Quindi, a parte il fattore  $\frac{1}{T_c}$ , come già si sa, gli spettri si replicano.

Quindi gli spettri si replicano sempre.

La traduzione degli spettri vale gli  $n$  grandi di energia con gli spettri di sempre.

La traduzione degli spettri vale gli  $n$  grandi di potenza con gli spettri di densità di potenza.

## • Campionamento e Tenuta



Il filtro di tenuta è una approssimazione del filtro di interpolazione.

Invece di interpolare tenendo conto di tutti i campioni che possiamo avere un contributo nei punti

diversi da quelli di campionamento, tendiamo a estendere, con un filtro di tenuta che è di ordine 0, il valore del segnale in tutto un intervallo di tempo.

La tenuta ha un effetto sugli spettri per cui esiste una differenza tra il segnale campionato e tenuto e il segnale campionato.

Il filtro di tenuta ha una risposta impulsiva rettangolare, con una risposta in frequenza sinc:

$$H_h(f) = T_c \underset{\text{norm}}{\text{sinc}}(\pi f T_c) e^{-j\omega f T_c}$$

Nella risposta in frequenza lo sinc ha gli zeri proprio sulle frequenze di campionamento.

Gli altri termini sono un termine di normalizzazione e un termine di ritardo, legato al fatto di aver assunto che la risposta impulsiva va da 0 a  $T_c$ .

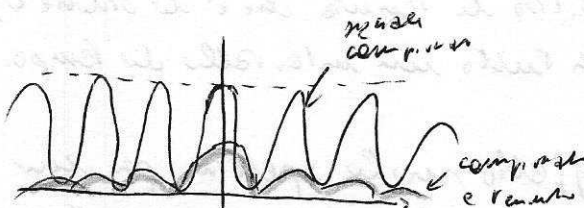
La risposta in frequenza del segnale campionato è tenuto e

$$X_h(f) = \text{sinc}(\pi f T_c) e^{-j\pi f T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T_c})$$

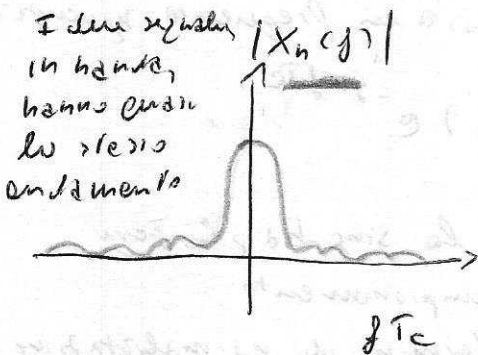
Lo spettro.

Il cui modulo è  $|X_h(f)| = |\text{sinc}(\cdot)| \sum | \cdot |$ .

Quali commenti assieme



Il filtro di tenute  
 è centrato al centro  
 le repliche spettrali, ma  
 non è ideale; è  
 un filtro che risponde,  
 anche un poco, in  
 corrispondenza delle repliche spettrali.



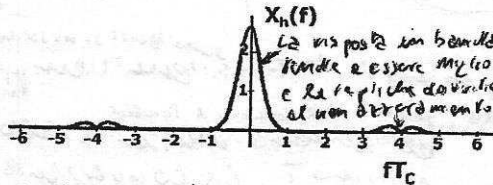
In banda, la risposta non è  
 un rettangolo, ma il  
 segnale decresce verso i  
 bordi. Quindi un banda  
 c'è sicuramente una certa  
 perdita. Inoltre abbiamo  
 delle repliche intorno alle  
 frequenze di campionamento,

che sono il filtro da indurre nel filtro di tenute che,  
 fisicamente, è più facile da realizzare, rispetto  
 ad altri filtri di interpretazione.



Per limitare gli effetti indesiderati di perdita in banda e ripetute dell'asse  
 in base alle prop. di campionamento, si opta nel filtro di tenuta, da più  
 facile realizzazione rispetto ad altri filtri di interpolazione, cercando di dare una  
 maggiore praticità delle

$$|X_h(f)| = |\text{sinc}(\pi f T_c / 2)| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(f - 2k/T_c)|$$



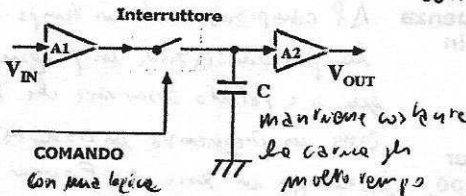
IN MOLTE APPLICAZIONI SI CONSIDERAN UN BUON FILTRO  
 IL FILTRO DI FREQUENZA PIU' SEMPLICE IL FILTRO DI  
 INTERPOLAZIONE SINC

risposta in banda e cercando di  
 allontanare le ripetute del  
 campionamento. Questo è  
 possibile con filtri di tenuta  
 che abbiano durata minore  
 quanto più lontano.

Con questo tipo di interpolazione  
 possiamo comunque migliorare la  
 risposta del filtro.

### Un esempio di circuito campionatore (Sample and Hold), applicabile a

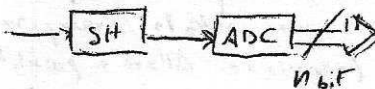
conversioni A/D e D/A



### Si possono pertanto distinguere quattro distinte fasi di funzionamento

- la fase di inseguimento (tracking), deve essere veloce
- la fase di apertura (la transizione tra inseguimento e tenuta), dipende da questo la limitazione in banda del campionamento del dispositivo
- la fase di tenuta (holding)
- la fase di acquisizione (la transizione tra tenuta e inseguimento)

### Schema Sample & Hold



Ci chiediamo cosa succede lo  $T_c$  di Fourier nei spalti campionati nella conversione in  
 sottocampionamento del principio di campionamento

## La Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

"IL NOME della Relazione di Poisson"

Un segnale limitato in tempo ammette lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k/T) e^{j2\pi k t / T}$$

che converge periodicamente

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k/T) \delta(f - k/T)$$

→ al campionamento in tempo corrisponde la periodicità in frequenza

→ al campionamento in frequenza corrisponde la periodicità in tempo

Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale limitato in tempo e campionato, ha una periodizzazione in tempo che si aggiunge a quella in frequenza, legata al campionamento

$T_c$  è il periodo di campionamento, sottomultiplo di ordine  $N$  dell'intervallo  $T$  in cui è conosciuto il segnale. Solo  $N$  campioni sono allora conosciuti definendo la sequenza che rappresenta il segnale

La periodicità dello spettro, per il campionamento, è data da  $1/T_c$ , la distanza in frequenza tra le righe dello spettro è invece  $1/T_c$ ; ne deriva che sono ancora  $N$  i campioni in frequenza diversi tra loro

sono i campioni in frequenza del segnale  
 sono tutti si moltiplica con  
 coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier  
 e si moltiplica per il periodo di campionamento

perché è la condizione di Dirichlet  
 all'interno dell'intervallo  
 pensa a  $T_c$  la convergenza al  
 segnale nel punto  $T_c$  per oltre al  
 la periodicità dell'intervallo

Nei due domini, tempo e frequenza,  
 da una parte abbiamo un campionamento  
 dall'altra abbiamo una periodizzazione.

Al campionamento in tempo corrisponde  
 la periodicità in frequenza e la  
 viceversa è potuto osservare che la periodicità  
 in frequenza in prodotto dello

sviluppo in serie di Fourier corrisponde  
 il campionamento nel dominio della  
 frequenza.

è noto il segnale in questo intervallo,  
 con un campionamento di  $N$  campioni,  
 allora solo  $N$  campioni sono conosciuti  
 definendo la sequenza (lungo  $N$  campioni)  
 che rappresenta il segnale.

Avendo  $N$  campioni in tempo  
 dov'è stato campionato  
 in frequenza allora è possibile  
 definire una trasformata che  
 associi ogni  $N$  campioni in tempo  
 a  $N$  campioni in frequenza.

La limitazione  
 è dell'intervallo



come possibile

però  
 segnali  
 periodici  
 campionati  
 sono solo  
 una porzione  
 di sempre  
 non frequenze

da si va a osservare che:

questa trasformata è la DFT (Discrete Fourier Transform) e si rappresenta la metà di (DFT)

È possibile definire una trasformazione che associa agli  $N$  campioni in tempo

$N$  campioni in frequenza

Tale trasformazione è chiamata **Trasformata Discreta di Fourier (DFT)**

Le sue espressioni sono la FFT, Fast Fourier Transform. convenientemente memorizzabili e calcolabili. In fase la trasformata di Fourier

Da un punto di vista formale la DFT si ricava come segue, normalizzando l'intervallo di campionamento a 1.

**Trasformata Discreta di Fourier**

$$T_c = 1 \quad T = N$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - n)$$

in coefficienti

$$X_k = X(k/T) = \frac{1}{N} \int_0^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t-n) e^{-j2\pi k t / N} dt$$

è scomposto l'indichiamo il periodo del tempo  $x(n)$  e non  $kT$

Secondo la durata dell'intervallo temporale  $T$  e quella di cui si parla. Perciò la scala  $T$  è  $N$ . Quando dato il segnale  $x(t)$ , il segnale che ha  $N$  campioni e il suo valore espressioni variabile.

Si sfrutta la linearità delle operazioni per invertire le operazioni di somma e integrazione.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n k / N}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi n k / N}$$

Dato il valore che rappresenta la trasformata di Fourier, il cui nome nel dominio della frequenza. Questa è l'operazione che si fa associare alla trasformazione di un valore della frequenza in tempo del valore di campioni della frequenza in frequenza, sempre  $N$ .

uso abituale;

Sequenza di campioni in tempo  $x(n)$  in frequenza  $X_k$  sempre  $N$

**DFT**

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n k / N}$$

Valore in frequenza  $X_k$  in tempo  $x(n)$  sempre  $N$

**IDFT**  $I = Inverso$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi n k / N}$$

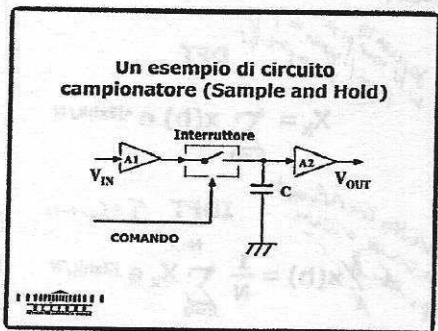
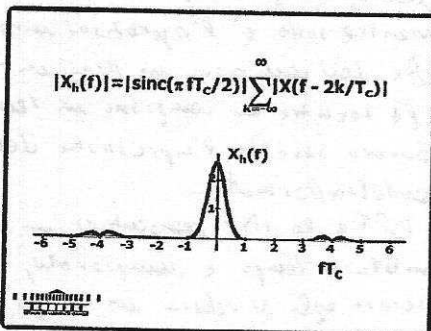
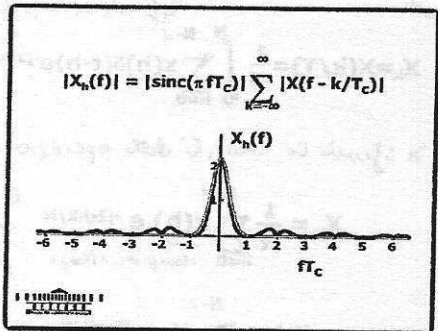
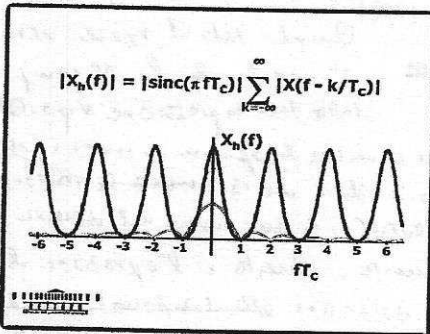
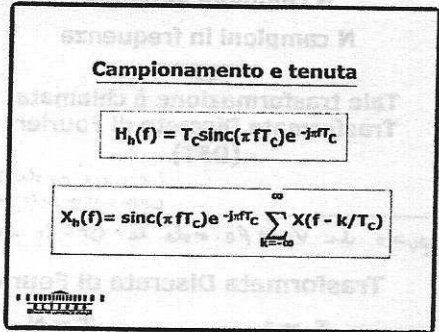
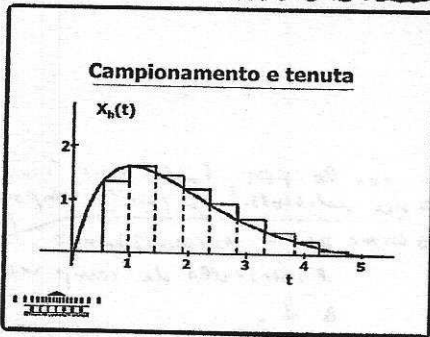
mentre sotto è l'operazione inversa, che dai campioni in frequenza si fa tornare ai campioni in tempo, ovvero si resta l'espressione della trasformata.

La DFT e la IDFT consentono, in uguale misura in tempo e campionato, di associare agli  $N$  valori in tempo,  $x(n)$   $\{x(n) \text{ in tempo } N \text{ valori in tempo } x(n)\}$ , in dominio della frequenza.

# COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Prof. Tullio Bucciarelli | Università di Roma

Lezione 41 Ancora sul campionamento

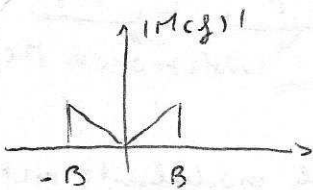


## LEZ. 21 - I SEGNALI MODULATI

LA MODULAZIONE È UNA TRASLAZIONE IN FREQUENZA CHE VIENE FATTA PER DIVERSE RAGIONI:

- Adattare i segnali ai mezzi di trasmissione (la voce su  $\mu$  c'ha un limite di propagazione)
- Usare lo stesso mezzo trasmissivo per più servizi riservando a ognuno una opportuna banda (rete cellulare, trasmissioni televisive, radiocast, ...)
- Trasmettere contemporaneamente più segnali (multiplicazione e divisione di frequenza, sistemi ad accesso multiplo, ...)
- Aumentare l'efficienza dei sistemi di trasmissione, ad esempio in sistemi antenna.

Abbiamo un segnale  $m(t)$  che occupa la banda  $B$ :  $m(t)$  è detto segnale modulante in banda base; ne è rappresentato il modulo,



lo spettro di ampiezza; non è la forma del segnale.

IL SEGNALE MODULANTE PORTA L'INFORMAZIONE.

Per un segnale vocale in una banda che va da 0 a 4 kHz, vengono solitamente  $\mu$  molte applicazioni; meno 16 kHz; immagini in 12 kHz.

Il segnale  $m(t)$ , modulante, è quello a cui è associata l'informazione, ed esso occupa una certa banda.

La modulazione può essere effettuata con una portante sinusoidale: portante in quanto trasporta il segnale con l'informazione, dunque l'informazione non è dissociata al segnale sinusoidale, ovvero alla portante. Il segnale sinusoidale opera ad una certa frequenza viene detta  $f_c$  la frequenza portante

La traduzione di  $m(t)$  in  $f_c$  è data da

$$m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

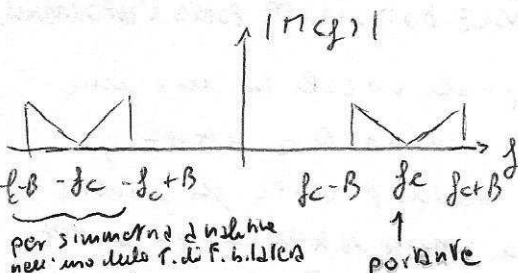
$\uparrow$  segnale modulante       $\leftarrow$  segnale portante       $\leftarrow$  freq. portante

e quello che si ottiene è un segnale modulato in banda stretta.

Generalizzando, abbiamo il seguente spettro

$$X(f) \leftrightarrow \frac{1}{2} \pi(f - f_c) + \frac{1}{2} \pi(f + f_c)$$

con banda non continua all'origine  $\rightarrow$  traslazioni di  $\pi(f)$



per simmetria di modulo nell'uso delle F. di F. b. l. c. s.

Il segnale modulante  $m(t)$  occupa la frequenza da  $0$  a  $B$ , per simmetria da  $-B$  a  $0$ . È stato traslato in frequenza, alla  $f_c$ .

Se  $f_c \gg B$  allora il segnale modulato è a banda stretta, questo è quanto di solito accade, per motivi tecnici e realizzativi. Questo fatto ha una importante reazione operativa.

\* La forma generale del segnale modulato è - opportuno  
$$x(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + 2\phi(t) + \phi_0)$$

che rappresenta una forma polare, in cui  $A(t)$  è l'ampiezza, che può variare, dello sviluppo del segnale modulato  $x(t)$

L'argomento del coseno è la fase istantanea del segnale modulato, la cui derivata normalizzata  $2\phi(t)$  è la prop. istantanea del segnale modulato  
 $f_c$  è la frequenza portante

$2\phi(t)$  è un termine di fase, che può variare, gli portante in porzioni

$\phi_0$  è la fase iniziale, che è un numero che caratterizza la scelta dell'origine dell'asse dei tempi

Tramite sviluppo trigonometrico si arriva alla forma seguente, che rappresenta una forma cartesiana, con parte reale e parte immaginaria, le cui componenti sono  $m_c$  e  $m_s$ , in cui  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

$$x(t) = m_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) - m_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

$\cos(\cdot)$  è la portante in fase,  $\sin(\cdot)$  è la portante in quadratura.

$m_c$  è la componente analoga di base frequenze del segnale in fase e  $m_s$  in quadratura del segnale.

1. Forme generale de l'equation de Laplace  
$$\Delta u = f(x, y, z)$$

2. Les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et Robin  
a) Dirichlet:  $u = \phi$  sur  $\partial\Omega$   
b) Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial n} = \psi$  sur  $\partial\Omega$   
c) Robin:  $\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = \beta$  sur  $\partial\Omega$

3. Le principe de maximum  
a) Principe de maximum fort  
b) Principe de maximum faible

4. Les solutions harmoniques  
a) Potentiel newtonien  
b) Potentiel de doublet

5. Les solutions de l'equation de Laplace  
a) Methode de separation des variables  
b) Methode des images

6. Les solutions de l'equation de Laplace  
a) Methode de conformite  
b) Methode de balayage

7. Les solutions de l'equation de Laplace  
a) Methode de Green  
b) Methode de Poisson



Abbiamo dunque un segnale sinusoidale che usiamo per trasmettere una informazione

$$e(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

Esso è caratterizzato dai tre parametri di ampiezza, frequenza e fase.

Ognuno di questi tre parametri può essere usato per trasmettere l'informazione modificando o l'ampiezza o la frequenza o la fase.

Avremo dunque

- Modulazione d'ampiezza
  - Modulazione di frequenza
  - Modulazione di fase
- } modulazioni angolari, o di angolo

\* La forma generale del segnale modulato è:

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + 2\psi(t) + \phi_0] = m_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) - m_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

(Annotations:   
 -  $A(t)$ : *forma polare*   
 -  $2\psi(t)$ : *ampiezza che può variare, detto inviluppo del segnale modulato*   
 -  $\phi_0$ : *termine di fase che può variare*   
 -  $m_c(t)$ : *per sviluppo in coseno*   
 -  $m_s(t)$ : *per sviluppo in seno del segnale modulato*   
 -  $\phi_0$ : *per portare l'informazione*   
 -  $\cos$  and  $\sin$ : *si di seno*   
 -  $m_c(t)$  and  $m_s(t)$ : *e di coseno*   
 -  $x(t)$ : *segnale modulato*   
 -  $A(t)$ : *forma d'oscillazione portante e portante*

in cui  $\cos(\dots)$  e  $\sin(\dots)$  sono rispettivamente le portanti in fase e in quadratura,  $m_c(t)$  e  $m_s(t)$  sono le componenti analitiche di bassa frequenza del segnale, in fase e in quadratura

La fase iniziale  $\phi_0$  serve per dare un riferimento generale di tempo. La sinusoidale ha un certo andamento nel tempo e  $\phi_0$  rappresenta una certa origine del sistema di riferimento.  $\phi_0$  è un numero che caratterizza lo stato della origine dell'ora dei tempi.

$A(t)$  è detto inviluppo del segnale modulato

$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \alpha(t) + \phi_0$  è detta la fase istantanea del segnale modulato

$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t)$  è la frequenza istantanea del segnale modulato  
normalizzazione      termine di costante

in cui  $\alpha(t)$  è la deviazione istantanea di fase

e  $\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t)$  è la deviazione istantanea di frequenza

## LA DEMODULAZIONE

È l'operazione attraverso la quale si torna alla banda da cui eravamo partiti con il segnale  $m(t)$ .  
Facendo riferimento alle componenti analitiche di banda frequenza del segnale modulato  $x(t)$

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

è possibile moltiplicare il segnale modulato per  $\cos(2\pi f_c t + \phi_0)$ , introducendo un fattore 2 di compensazione degli scalari analitici; si ottiene

$$x(t) = 2(x_c(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t + \phi_0) - x_s(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_0) \sin(2\pi f_c t + \phi_0))$$

$\frac{1}{2}(1 + \cos(2\cdot))$        $\frac{1}{2} \sin(2\cdot)$

Oppure posso moltiplicare il segnale modulato per  $-2 \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$ , anche in questo caso introducendo un fattore 2 di compensazione degli sviluppi analitici, si ottiene

$$x(t) = 2 \cdot (x_c(t) \cdot -2 \sin(2\pi f_c t + \phi_0) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_0) + x_s(t) \cdot \sin^2(2\pi f_c t + \phi_0))$$

$$\stackrel{**}{=} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi f_c t + \phi_0))$$

Quindi, effettuando queste due moltiplicazioni ottengo altrettanti segnali, dai quali, che hanno doppia frequenza portante, sarà possibile ricavare  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , che sono nella propria banda di interesse, tramite dei filtri passa banda che passano invece solo le componenti analitiche di banda frequenziale.

In sostanza, ricavando con  $x_A(t)$  il segnale che si ottiene moltiplicando  $x(t)$  per  $2 \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_0)$  e con  $x_B(t)$  il segnale che si ottiene moltiplicando  $x(t)$  per  $-2 \cdot \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$ , si hanno

$$x_A(t) = 2 \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_0)$$

e

$$x_B(t) = -2 \cdot x(t) \cdot \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 x_A(t) &= 2 x_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) = \\
 &= 2 x_c(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t + \phi_0) - 2 x_s(t) \cdot \underbrace{\sin(2\pi f_c t + \phi_0) \cdot \sin(2\pi f_c t + \phi_0)}_{\frac{1}{2} \sin((2\pi f_c t + \phi_0) \cdot 2)} \\
 &\quad \frac{1}{2} (1 + \cos(2 \cdot (2\pi f_c t + \phi_0))) \quad \frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t + 2\phi_0) \\
 &\quad \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0)) \quad \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0) \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \text{in quanto} \quad \downarrow \\
 \cos^2(x) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \quad \text{e} \quad \cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> = x_c(t) + x_c(t) \cdot [\cos(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0)] + \\
 &\quad - x_s(t) \cdot \sin(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0);
 \end{aligned}$$

in  $x_A(t)$  le sinusoidi sono a frequenza doppia di portante.

Considerando le nuove possibilità di moltiplicazione, abbiamo

$$\begin{aligned}
 x_B(t) &= -2 x_c(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_0) = \\
 &= -x_c(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t + \phi_0) \cdot \sin(2\pi f_c t + \phi_0) + \\
 &\quad + 2 x_s(t) \cdot \sin^2(2\pi f_c t + \phi_0) = \\
 &\quad \quad \quad \frac{1}{2} (1 - \cos(2 \cdot (2\pi f_c t + \phi_0)))
 \end{aligned}$$

$$= -x_c(t) \cdot \sin(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0) + x_s(t) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi \cdot 2 f_c t + 2\phi_0))$$

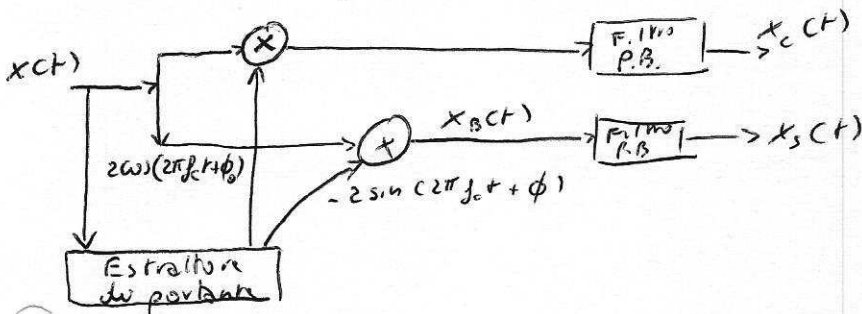
Le funzioni sinusoidali hanno tutte frequenza doppia

Se il segnale è a banda stretta allora  
 sarà evidente che compiono nelle espressioni  
 sono separati in frequenza.

In  $x_A(t)$  avremo che  $x_c(t)$  sarà nelle nostre  
 banda di partenza,  $x_c(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c \cdot t + 2\phi_0)$  e  
 $x_s(t) \cdot \sin(2\pi \cdot 2f_c \cdot t + 2\phi_0)$  andranno intorno alla  
 frequenza  $2f_c$ , e intorno a questa frequenza  
 avremo la banda B; se  $f_c$  è molto più grande  
 di B allora questi termini sono assolutamente  
 separabili attraverso una operazione di filtraggio.

Arriviamo quindi ad uno schema di principio,  
 che trova numero e applicazione e che dimostra  
 come si possa tornare in bassa frequenza,  
 dopo essere saliti in alta frequenza.

$x(t)$  è il segnale modulato



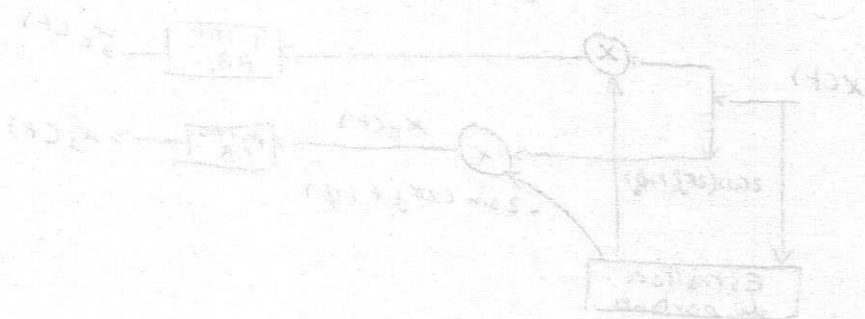
Dobbiamo ricavare dal segnale l'indicazione della  
 frequenza portante, che deve essere sincrona con quella

di trasmissione.

Quando in due mixer sarà demodulato il segnale, ottenendo a due segnali, con il segnale in banda di partenza e segnale con banda di frequenza doppia.

Il filtro passa basso peranno usare solamente la componente analogica di bassa frequenza.

Questo è uno schema di principio di come si possa demodulare, e prendere l'alta frequenza restituirle.



# MODULAZIONE IN AMPLIEZZA

IL SEGNALE MODULANTE  $m(t)$ , SE È IN COORDINATE POLARI, FA VARIARE L'INVELOPPO OPPURE UNA O PIÙ TRAMANDRE LE COMPONENTI ANALOGICHE DI BASSA FREQUENZA (COMPONENTI CARTESIANE), TRASPORTANDO UNO O DUE SEGNALI IN BANDA BASE

Una formula generale di come modulare in ampiezza è:

$$x(t) = (a_p + k_a m(t)) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) =$$

*costante*      *quantità proporzionale al segnale da trasmettere*

segnale  
modulato

$$= a_p \cos(2\pi f_c t + \phi_0) + k_a m(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0)$$

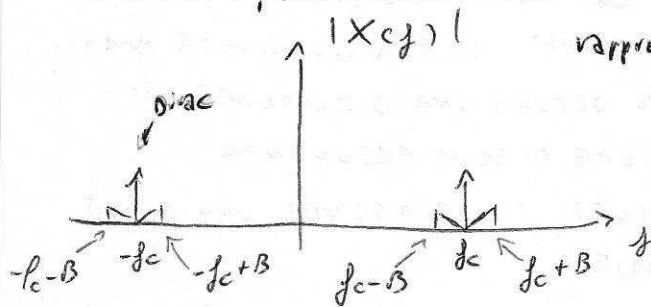
Il segnale modulato è un coseno moltiplicato per una certa quantità. Esso è fatto della portante e un viene aggiunto un termine proporzionale al prodotto del segnale modulante  $m(t)$ , per la portante. In funzione dei valori di  $a_p$  e  $k_a$  abbiamo diversi tipi di modulazione.

Lo spettro del segnale modulato è, in generale:

$$X(f) = \frac{a_p}{2} e^{j2\pi\phi_0} \delta(f - f_c) + \frac{a_p}{2} e^{-j2\pi\phi_0} \delta(f + f_c) + \frac{k_a}{2} e^{j2\pi\phi_0} \pi(f - f_c) + \frac{k_a}{2} e^{-j2\pi\phi_0} \pi(f + f_c)$$

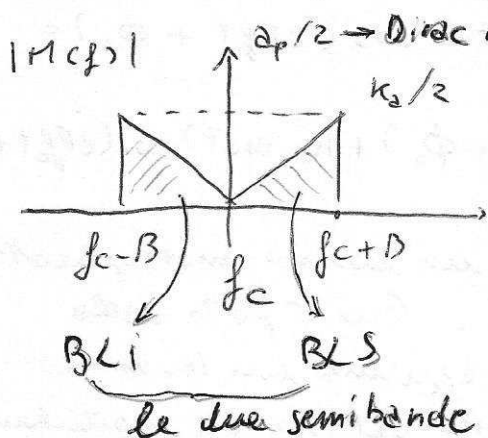
I PRIMI DUE ADDENDI SONO RELATIVI ALLA PORTANTE CON AMPLIEZZA  $a_p$ , CON DUE DIRIZI CENTRATI IN  $\pm f_c$ . GLI ALTRI DUE FANNO RIFERIMENTO AL SEGNALE MODULANTE, OVERO TRASPOSTO INTORNO ALLA PORTANTE,  $f_c$  e  $-f_c$  per simmetria.

Orvvero, in termini di modulo, per descrivere la rappresentazione in banda



Gli impulsi di Dirac rappresentano la portante. Poi  $\omega$  sono gli spettri dei segnali

La situazione in banda tradotta in dettaglio:



Si ha il Dirac riferito alla portante. Si hanno due semibande, la Banda laterale Inferiore e la Banda laterale superiore

Nel fare riferimento a segnali reali, possiamo ricordare che lo spettro di un segnale reale ha una certa serie di regole di simmetria tra frequenze positive e frequenze negative che si ripetono, quando il segnale viene tradotto in frequenza, in un rapporto ben preciso fra le semibande superiori e le semibande inferiori.



Gli spettri di ampiezza e di densità di potenza saranno simmetrici, e le eventuali spettro di fase saranno antisimmetrici, per cui tenendo le due bande (il segnale modulato ha una banda ridotta rispetto a quello che si ha in base frequenza) può non essere utile.

Per le proprietà di simmetria spettrale solo una delle due bande laterali (BLI o BLS), *infatti*

è necessaria per ricostruire  $m(t)$  a partire dal segnale modulato, almeno dal punto di vista teorico, viene da vedere cosa succede dal punto di vista operativo.

Inoltre esistono delle forme di modulazione in cui si tiene <sup>una</sup> e si sfrutta proprio queste proprietà di simmetria.

### Modulazione in doppia

banda laterale, e la modulazione che tiene entrambe le bande

Banda laterale doppia a portante intera (BLD-PI): è una prima formulazione, dove

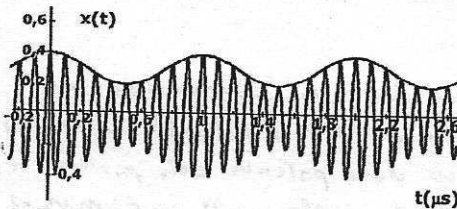
$a_p$  è sufficientemente elevato da rendere  $A(t)$  sempre positivo

la portante → l'involuppo

BLD - PI

$$a_p + k_a m(t) > 0$$

condizione che si deve verificare affinché l'involuppo sia sempre positivo. L'involuppo genera quello di cui escluderemo  $\pi$  che mostra l'andamento del segnale.



A lato la situazione che vorremmo e trovare nel caso in cui il segnale modulante sia semplicemente una sinusoida.

portante, sinusoidale, che viene modificata ciclicamente dall'altro segnale sinusoidale.

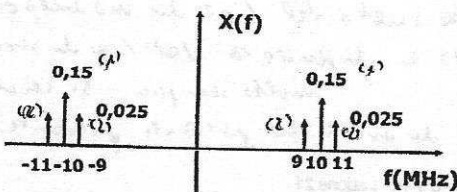
Il rapporto delle frequenze è di 10.

alcuni parametri →

$$a_p = 0,3V \quad k_a = 0,1V$$

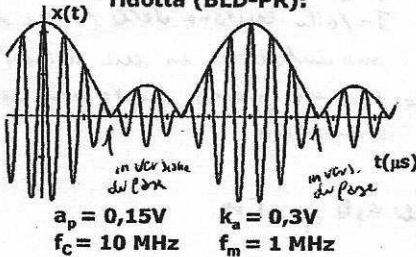
$$f_c = 10 \text{ MHz} \quad f_m = 1 \text{ MHz}$$

portante a 10 MHz      modulante a 1 MHz



A lato lo spettro corrispondente al segnale precedente, con il Dirac che corrisponde alla portante  $\omega_c$  e il Dirac che rappresentano le due bande laterali, che corrispondono al segnale modulante  $\omega_m$

**Modulazione in doppia banda laterale**, una seconda formulazione, a portante ridotta (BLD-PR):



Si per le varie modulazioni provare con

**Compromesso tra la semplicità dei ricevitori e la disponibilità di potenza in trasmissione**

quindi dei demodulatori

portante, però le operazioni di fase per demodulare possono diventare più complesse -

Quando  $a_p = 0$  ci portiamo nella situazione di banda laterale doppia a portante soppressa

Uno dei problemi che si hanno nei limiti di comunicazione è quello della disponibilità di trasmissione a potenza limitata. Avere una portante presente significa dare potenza alle portante e quindi sottrarre questa potenza, sostanzialmente, alla parte modulata del segnale. Quindi potremmo pensare di annullare completamente la portante e dare tutta la potenza al segnale che porta l'informazione, ma in questo modo creiamo sicuramente una complicazione maggiore nel ricevitore.

Dal punto di vista ingegneristico la scelta del tipo di modulazione sarà legata a questo compromesso e dipenderà dal tipo di servizio. Per fare rientrare alle basi costo e molto semplice, si cerca e vedremo come si demodula, di avere la portante presente

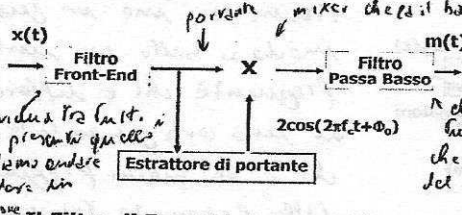
$a_p$  non ha più un valore tale da garantire un inviluppo sempre positivo e questo determina la soluzione a lato, in cui, ad un certo punto ci sono delle inversioni di fase per cui l'andamento dell'inviluppo di questo segnale non viene più l'andamento del segnale modulato ma ha delle inversioni.

È sempre una modulazione, e gli spettri si sono sempre andati a

frequenze intorno alla frequenza

Le forme di demodulazione | tutto in un colpo solo: si batte il segnale ricevuto con la stessa portante.

**Demodulazione omodina**, una forma di demodulazione



individuare fra tutti i segnali presenti quello che vogliamo estrarre e poterlo avere in considerazione  
 ↓  
 Il Filtro di Front-End serve ad isolare la trasmissione voluta  
 È una operazione associabile alla sintonia

mixer che fa il battimento del segnale individuato con la portante  
 Da x(t) estraiamo direttamente il segnale m(t), con un sistema che ci scappa come ripetuto e lato.  
 Il segnale m(t) è quello che ha il contenuto informativo

**Problema fondamentale: sincronismo della portante**

il segnale che vogliamo avere, deve avere

Stessa frequenza e stessa fase

di quello che avevamo in trasmissione.

Ad es.:

**Modulazione BLD-PS**

banda laterale doppia, portante soppressa, quindi tutta il termine sp  
 x(t) è il segnale modulato.  
 riproducendo il segnale modulante in un segnale sinusoidale che è il coseno di ωt.

$$x(t) = k_a m(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi_0)$$

Si rappresenta lo sfasamento tra la portante in trasmissione e la portante in ricezione

Rappresenta lo sfasamento tra la portante in trasmissione e quella in ricezione, quello che otteniamo, a lato è un fattore proporzionale al messaggio, al segnale modulante, che moltiplica un cos θ e un seno a freq. doppia.

$$x_D(t) = k_a m(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi_0) \cos(2\pi f_c t + \Phi_0 + \theta) = \frac{k_a m(t)}{2} \{ \cos \theta + \cos(2\pi f_c t + \Phi_0 + \theta) \}$$

Dal filtro passa-basso di uscita non può emergere il segnale se

per  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta = 0$ , quindi

$\theta = \pi/2 \Rightarrow$  le componenti in banda base va a 0, quindi dal filtro non convergerebbe nulla. Cioè la banda originaria è andata a zero e dal filtro non emerge nulla.

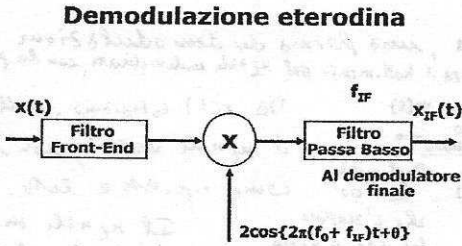
È importante che la portante di demodulazione sia sincrona, e della stessa frequenza e quella di trasmissione sia in questo. Trasmittendo la portante semplifica la demodulazione.

In generale il problema è quello di trovare la portante del segnale ricevuto.

Quindi, nella demodulazione omodina tutto avviene in un colpo solo, cioè si batte il segnale ricevuto con la stessa portante.

Si normalmente si opera con la demodulazione eterodina,

Nella demodulazione eterodina, per rimanere lo stesso, il precedente, la frequenza con cui si va a fare riferimento non è la stessa frequenza che si trasmette, ma in qualche modo si batte con una frequenza che è differente, di una certa quantità  $f_{IF}$ , che è la media frequenza, delle frequenze trasmesse.



A tutto il risultato dell'operazione

$$x_D(t) = k_a m(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) \cos\{2\pi(f_c \pm f_{IF})t + \phi_0 \pm \theta\} = \frac{k_a m(t)}{2} \{\cos(f_{IF}t + \theta) + \cos(2\pi 2f_c t \pm f_{IF} + 2\phi_0 \pm \theta)\}$$

All'uscita del filtro che è essere opportunamente fatto, non avremo più il segnale modulante, ma avremo un segnale ancora modulato, però non intorno alla frequenza portante, ma intorno alla frequenza di media frequenza.

all'uscita del filtro, che deve essere opportunamente fatto

$$x_{IF}(t) = \frac{k_a m(t)}{2} \cos(f_{IF}t + \theta)$$

Possiamo dunque ricondurre a media frequenza tutte una serie di operazioni: amplificazione, controllo del guadagno, filtraggio demodulazione.

L'amplificazione, AGC, il filtraggio, la demodulazione sono realizzati a una frequenza fissa, più bassa di quella di trasmissione con meno problemi realizzativi, di stabilità, di derive termiche, anche in presenza di variazioni di frequenza (agilità...)

Essi sono tutti realizzati a una frequenza fissa.

C'è il problema della frequenza immagine ( $f_c - f_{IF}$ ).

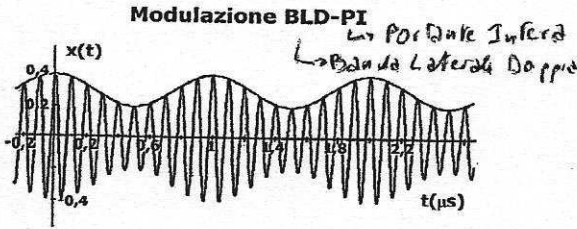
La frequenza immagine è simmetrica di  $f_{IF}$  rispetto alla portante: questo problema è affrontato ricorrendo bene al filtro di Front-End che deve mettere piuttosto precocemente a tacere due quote frequenze che sono spostate ad una distanza di due volte la freq.

Filtro di Front-End

C'è il problema della frequenza immagine ( $f_c - 2f_{IF}$ ).

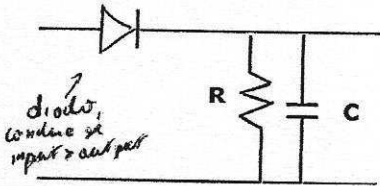
Filtro di Front-End

## Demodulazione involuppo



## Demodulazione involuppo

### Modulazione BLD-PI

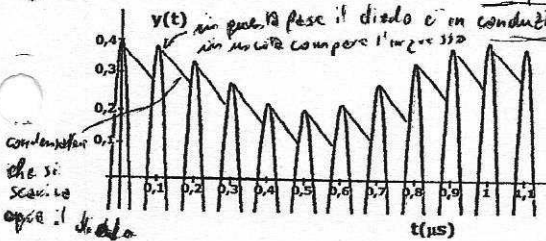


ingrandendo tale segnale in un demodulatore

Il diodo, per sua natura, se il segnale presente all'ingresso è più grande di quello che sta sull'uscita, condurrà. Viceversa decadrà quando il segnale presente sul condensatore (una specie di memoria) sarà più grande dell'ingresso e il diodo si interdetterà e quindi il dispositivo non condurrà.

## Demodulazione involuppo

Schema elettrico con R, C



Una scelta della costante di tempo RC ci permette di realizzare una demodulazione involuppo.

## Demodulazione involuppo

Un filtro serve a eliminare le oscillazioni alla frequenza di portante. Filtrata la continua, si riottiene il segnale modulante

La costante di tempo è il segnale in uscita al sistema di demodulazione. Ci sarà anche l'andamento del segnale modulante, e a seconda delle componenti in frequenza più alte.

Un piccolo filtro in uscita lo può eliminare e quindi permettere di ricavare il valore del segnale modulato.

**Demodulazione involucre**

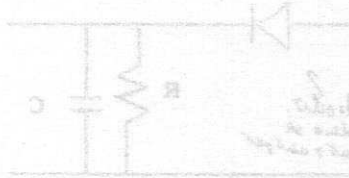
Modulazione BLD-PM  
 Modulo di carica 10 pF  
 Modulo di carica 20 pF



risultato del segnale  
 nel suo stato di BLD

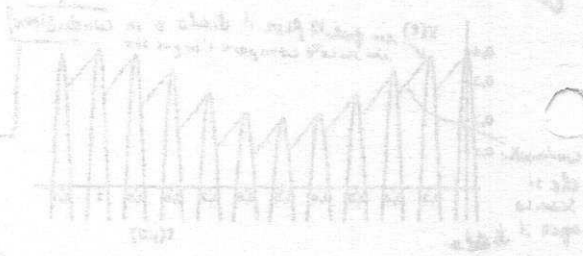
**Demodulazione involucre**

Modulazione BLD-PM



diode  
 carica  
 di carica

**Demodulazione involucre**



**Demodulazione involucre**

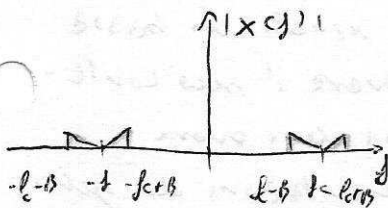
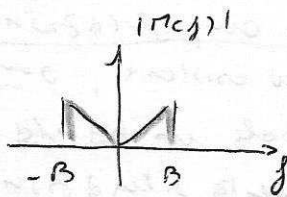
Un filtro serve a eliminare  
 le oscillazioni alla frequenza di  
 portante. Il filtro è costituito  
 da un circuito che attenua il segnale  
 modulante.

## LEZ. 22 - MODULAZIONE ANGOLARE

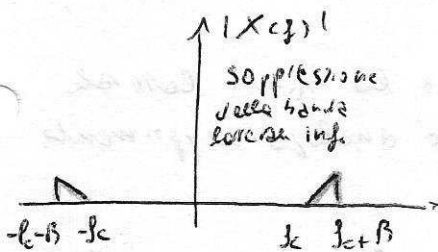
Per modulazione angolare si intende la modulazione di frequenza e la modulazione di fase.

Di seguito, prima, la trattazione di una modulazione di ampiezza non convenzionale, la modulazione in Banda Laterale Unica, modulazione BCU.

### • MODULAZIONE IN BANDA LATERALE UNICA



la banda intorno alla portante  $f_c$  si è raddoppiata.

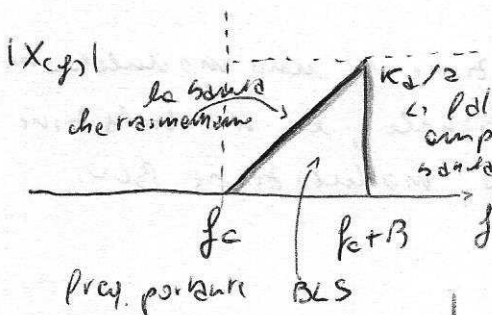


Ricordando il simbolismo di occupazione di banda del segnale modulante  $m(t)$  in banda base, che occupa la banda  $B$ , quindi da  $0$  a  $B$  e da  $0$  a  $-B$  (è simmetrica e ricordando lo spettro di base, in figura, ad esempio, quello a portante soppressa, vediamo che

la banda intorno alla portante  $f_c$  si è raddoppiata. Si può dunque pensare di usare solo una delle due bande laterali, evitando l'allargamento di banda e aumentando l'efficienza del sistema per quasi raddu-

Si tratta, quindi, della Banda Laterale Unica, B.U.  
 Dunque si trasmette in un'unica banda.

La situazione vista in forma delle portante e  
 lo segnale, con la portante  $f_c$ , la banda che



viene trasmessa, il  
 relativo fattore di  
 ampiezza

quest'ultimo

essenziale in

quanto è facilmente

controllabile, attraverso, ad es.,

sistemi di amplificazione.

Un segnale con

uno spettro come sopra non può esistere, ovvero

non può esistere un segnale reale in banda

base che, traslato, porta in questa situazione

spettrale, perché un qualsiasi segnale in bassa

frequenza,  $x$  è reale, dovrà avere il suo conte-

nuto di frequenze positive, ma deve avere

neccissariamente, in una rappresentazione di spettro

bilatera, le sue componenti di frequenze

negative.

Nell'esempio è stata soppressa la banda laterale

inferiore, ma il ragionamento è duplice: sopprimendo

la banda laterale superiore



Per risolvere questa situazione si fa riferimento al fatto che uno spettro di un segnale  $x(t)$

consiste in comporre di due parti: quella positiva dello spettro e quella negativa, ovvero

$$\underline{X}(f) = \underline{X}^+(f) + \underline{X}^-(f) = \underline{X}(f)u(f) + \underline{X}(f)u(-f)$$

Ci interessa il segnale analitico positivo  $x^+(t)$ , il cui spettro è  $\underline{X}^+(f)$ , con

$$\underline{X}^+(f) = \underline{X}(f) \cdot u(f)$$

analitico per  
realtà non  
per se

Questo perché ci si occupa dello spettro in conseguenza della eliminazione di una banda laterale.

Si associa a  $x(t)$  il significato di segnale modulato e quindi possiamo pensare che in base frequenza esista un segnale  $\underline{m}(f)$ , detto involucro complesso, con andamento spettrale reale, ottenuto moltiplicando per 2 e traslando di  $f_c$  lo spettro  $\underline{X}^+(f)$

$$\underline{m}(f) = 2 \underline{X}^+(f + f_c) \longleftrightarrow 2 x^+(t) e^{-j2\pi f_c t}$$

Quando il segnale di involucro complesso è ottenuto per traslazione di una quantità pari alla portante dello spettro del segnale analitico positivo.

# INVILUPPO COMPLESSO

Dopo aver definito la banda laterale unica, per soppressione di una parte di banda, si vede che non può esistere un segnale reale in banda base che, traslato positivamente e negativamente, un circuito non con le simmetriche caratteristiche di un segnale reale (freq. positive e negative). Si può dunque nuovo il concetto di spettro del segnale analitico, positivo  $x^+(t)$  in un caso, o negativo in un altro  $x^-(t)$ , e ricavato dal Tap di BCU, Banda laterale unica.

Poi si associa al segnale  $x(t)$  il significato di segnale modulato e quindi si effettua l'esistenza del segnale  $m(f)$ , detto inviluppo complesso, ottenuto per traslazione di uno dei circuiti per la portante, dello spettro del segnale analitico.

$m(t)$  segnale modulante in banda base, occupa banda B.

→ poiché la banda intorno alla portante è ridoppiata si avrà solo una delle due bande laterali

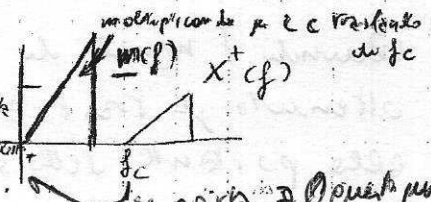
⇒ Banda laterale unica (comp. o inf.)

→ Non può esistere un segnale reale la cui portante occupi una parte di banda

⇒ Introduzione del concetto di spettro del segnale analitico positivo, nel caso di Banda laterale unica superiore

→ Inviluppo complesso  $m(f)$

con riferimento alla parte di spettro portante e traslato la frequenza in cui come si ottiene lo spettro  $m(f)$ , detto Inviluppo complesso, che rappresenta la traslazione di un segnale in banda base.



si porta a questo punto

Cerchiamo di coprire l'andamento in tempo di  $X^*(f)$ , che è stato ricavato come prodotto di due spettri, che sappiamo corrispondere nel tempo ad una operazione di convoluzione

$$X^*(f) = X(f) \mu(f)$$

in cui  $X(f)$  è la trasformata di  $x(t)$  e il risultato è la trasformata di un impulso di Dirac di area  $\frac{1}{2}$  e un vettore rotato  $\frac{1}{2}\pi$ , ovvero

$$\mu(f) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{j}{2\pi f}$$

↓  
che è l'elemento unitario rispetto all'operazione di convoluzione

Da queste informazioni ricaviamo che  $x^*(t)$  è la convoluzione del segnale con l'espressione sopra

$$x^*(t) = \frac{1}{2} x(t) + j \frac{1}{2} \left[ x(t) * \frac{1}{\pi t} \right]$$

il segnale analitico positivo

Questa è la motivazione dell'introduzione di questi segnali complessi, che sono segnali legati 1 a 1 con il segnale vero che stiamo considerando. Infatti, a parte il fattore  $\frac{1}{2}$ , la parte reale di  $x^*(t)$  è il segnale analitico positivo, e il segnale stesso. Quindi abbiamo due segnali veri, quelli che stiamo trattando, uno legato in maniera chiara ai segnali analitici (segnali complessi) che lo rappresentano formalmente.

La parte immaginaria è la convoluzione del segnale con  $\frac{1}{\pi t}$ , e meno del fattore  $\frac{1}{2}$ .

$$x_H(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

$x_H(t)$  è un operatore importante nello studio dei segnali, detto Trasformata di Hilbert del segnale.

Dunque possiamo dire che il segnale analitico positivo, a meno del fattore  $1/2$ , è la combinazione lineare del segnale e della sua trasformata di Hilbert.

Questo ha una conseguenza nell'operazione di modulazione che stiamo cercando di rappresentare.

In effetti abbiamo che

$$X^+(f) = \frac{k_d}{2} \pi^+(f - f_c) \longleftrightarrow \frac{k_d}{2} m^+(t) e^{j2\pi f_c t}$$

↑ fattore di scala, invariante
← corrispondente in tempo

↳ segnale analitico positivo, corrispondente alla base frequenza, traslato da  $f_c$ , verso destra.

In tempo, il segnale analitico positivo del segnale modulante,  $m^+(t)$ , a meno del fattore di scala, viene spostato in torno alla frequenza  $f_c$  e quindi l'operazione che descrive questo trasferimento in frequenza è questo in tempo:  $\frac{k_d}{2} m^+(t) e^{j2\pi f_c t}$

Ricordiamo che il segnale è 2 volte la parte reale del segnale analitico, abbiamo le soluzioni che rappresenta  $x(t)$ , il segnale che ha quel tipo di spettro che ho ha un corrispettivo in base frequenza reale che lo rappresenta. Quindi  $x(t)$  può essere descritto come segue sviluppando secondo i metodi analitici:

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} [x^+(ct)] = k_a \operatorname{Re} (m^+(ct) e^{j2\pi f_c t}) =$$

$$= \frac{k_a}{2} \operatorname{Re} [(m(t) + j m_I(t)) e^{j2\pi f_c t}] =$$

$$= \frac{k_a}{2} [ \underbrace{m(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{segnale} \\ \text{modulante}}} \underbrace{\cos(2\pi f_c t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{portante} \\ \text{in fase}}} - \underbrace{m_I(t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{trasformata} \\ \text{di Hilbert} \\ \text{del segnale}}} \underbrace{\sin(2\pi f_c t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{portante in} \\ \text{quadratura}}} ]$$

Stessa portante di modulazione  
che avviene nello modulatore  
di ampiezza in doppio canale  
laterale

ovvero il coseno  
della portante

Con l'introduzione dei segnali analitici, che sono complessi,  
si ottiene una rappresentazione del segnale  
modulato e, che questo segnale sia analitico intorno  
alla frequenza  $f_c$ , non è sufficiente nelle  
espressioni stesse in termini  $m(t)$  e la sua  
trasformata di Hilbert non nello banda di base  
frequenza e non implementabile in pratica  
con un coseno a un suo e grande costo  
trasporti in alta frequenza.

L'operazione di trasformazione di Hilbert e lo quadratura  
della portante sono quelle che ci garantiscono di fatto la  
scoperta una delle simbole delle bande laterali

fine nota 1

- La trasformata di Hilbert

La trasformata di Hilbert è stata vista come il risultato di una convoluzione, che è l'operazione che ci consente di descrivere il passaggio di un segnale in un filtro.

Si definisce, dunque  $S_H(t)$ , trasformata di Hilbert, del segnale  $S(t)$ , l'uscita del filtro di Hilbert in un ingresso  $S(t)$ .

Il filtro di Hilbert è quel filtro che ha come risposta impulsiva  $1/\pi t$ .

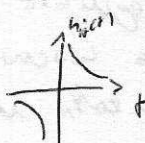
Quindi

$$H_H(f) = -j \cdot \text{sign}(f) = e^{-j \frac{\pi}{2} \text{sign}(f)}$$

$$|H_H(f)| = 1, \text{ tranne che per } f=0$$

$$\phi_H(f) = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(f), \text{ ovvero } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{per } f > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } f < 0 \end{cases}$$

Tutto questo ci porta a dire che la risposta impulsiva del filtro di Hilbert,  $h_H(t)$  è

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t}, \text{ di andamento iperbolico}$$


Si tratta, evidentemente in quanto il modulo è 1, tranne che per le valenze, di un filtro "passa tutto", che introduce solo sfasamenti, di  $-90^\circ$  per le frequenze positive e di  $90^\circ$  per le

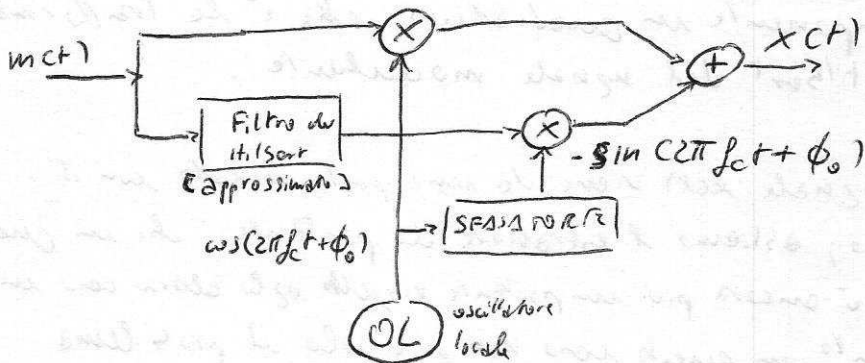
frequenze negative.

Il filtro di Hilbert non rispetta il principio di causalità (condensamento a posteriori della risposta impulsiva) e quindi non è realizzabile.

Si può solo approssimare quando le bande del segnale sono strette.

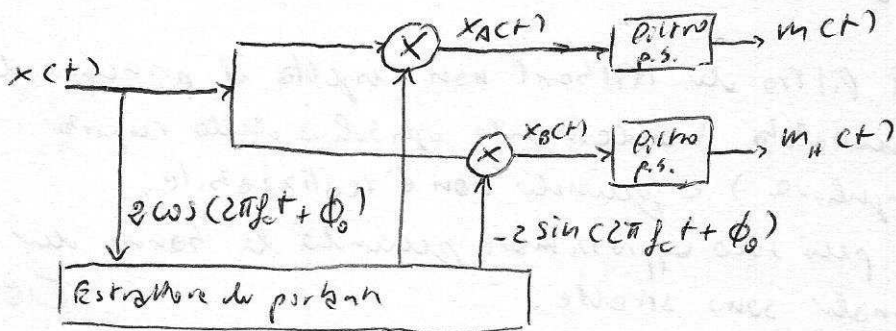
[15:00]

Di seguito come può essere ottenuto un segnale modulato,  $x(t)$ , in compiezza, in banda laterale unica, almeno concettualmente.



Abbiamo il segnale  $m(t)$  che entra nel filtro di Hilbert, che sarà in qualche modo approssimato. Abbiamo a due mixer, una con il coseno e uno con il coseno spostato dello sfasatore di  $\frac{\pi}{2}$ , ottenendo  $-\sin(2\pi f_c t + \phi_0)$ . La somma di queste operazioni dà  $x(t)$ , ovvero il segnale modulato in banda laterale unica.

Di seguito lo schema di demodulazione



Si ha uno stesso schema di demodulazione visto che il segnale modulato  $x(t)$  ha una componente in fase che è il segnale modulante, e una componente in quadratura che è la trasformata di Hilbert del segnale modulante.

Il segnale  $x(t)$  viene da una parte mixato con il coseno; abbiamo l'estrattore di portante, che in questo caso è ancora più importante rispetto agli altri con un perché in questo caso non c'è solo il problema della ricostruzione della portante, ma anche quello del recupero di una semibanda.

Da una parte,  $x_A(t)$ , abbiamo il canale che si riferisce alla componente in cui sarà presente il segnale e il segnale portante ad una frequenza doppia. Dall'altra parte,  $x_B(t)$ , abbiamo l'altro canale che agisce sulle trasformate di Hilbert.

Con l'operazione di filtraggio passa basso, nel



primo canale radiofonico  $m(t)$ , che è il segnale che opera intenzione di trasmissione e che è stato trasmesso in banda laterale unica.

I segnali considerati fino a qui erano formalmente della forma

$$\frac{k_a}{2} [m(t) \cos(2\pi f_c t) - m_H(t) \sin(2\pi f_c t)] ,$$

essendo sia la componente in fase,  $m(t)$ , che la componente in quadratura,  $m_H(t)$ , si tratta di una modulazione di ampiezza, avendo giocato in modo particolare sulla banda del segnale, ma, scrivendo l'espressione in termini polari, si avrebbe anche una componente angolare di modulazione. [18.10]

- Modulazione di fase e di frequenza per segnali analogici

Si ricorda che l'andamento del segnale

$$x(t) = A \cos [2\pi f_c t + \phi_0 + \alpha(t)],$$

che viene scritto, con il termine  $\alpha(t)$ , dev'ist. di fase, dello spostamento, può essere scritto come la parte reale del segnale complesso moltiplicato da un termine che non varia dello spostamento. Il termine  $\alpha(t)$  è il termine con l'informazione associata.

Dunque

$$x(t) = A \cos [2\pi f_c t + \phi_0 + \alpha(t)] = \operatorname{Re} [ \underline{x}(t) e^{j2\pi f_c t + \phi_0} ]$$

con  $\underline{x}(t) = A e^{j\alpha(t)}$ , segnale complesso in c.c.

$\alpha(t)$  è la deviazione istantanea di fase, che è il termine con l'informazione associata

$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t)$  è la deviazione istantanea di frequenza

La modulazione di fase e la modulazione di frequenza sono le due forme di modulazione che convergono nella cosiddetta modulazione angolare. Di seguito le formule descrittive.

## MODULAZIONE DI FASE

$$\alpha(t) = k_f m(t) ; \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{1}{2\pi} k_f \frac{d}{dt} m(t)$$

In un  $\alpha(t)$  è proporzionale alla fase. Di conseguenza la sua derivata, la derivazione istantanea di frequenza avrà l'espressione come sopra

## MODULAZIONE DI FREQUENZA

$$\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau ; \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t) = k_f \cdot m(t)$$

In cui è la derivazione istantanea di frequenza ed essere proporzionale al segnale secondo il coefficiente  $k_f$ . Di conseguenza la derivazione istantanea della fase  $\alpha(t)$  è proporzionale all'integrale del segnale

La convergenza delle due rappresentazioni è legata all'esistenza dell'integrale, alla sua sommabilità. Le condizioni di sommabilità sono di solito rispettate, in quello che riguarda l'entrambo del segnale modulante.

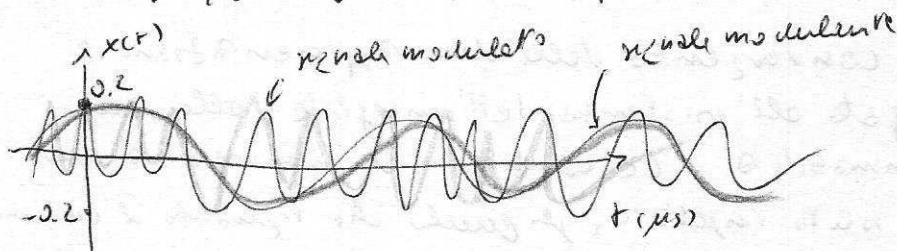
In un segnale modulato in fase abbiamo un segnale modulante sinusoidale ad una frequenza modulante  $f_m$ , e abbiamo un

segnale modulato ad una frequenza modulata  $f_c$ , la frequenza portante.

Poi c'è un parametro  $k_f$ , detto indice di modulazione che rappresenta la profondità di modulazione e poi c'è l'ampiezza del segnale modulato, che non cambia.

Quello che cambia è la periodicità della forma d'onda e l'informazione non sta più nelle ampiezze del segnale modulato ma è codata e finisce nella variazione della fase, o, se vogliamo, nel tempo che passa dagli attraversamenti degli zeri. L'informazione che vogliamo trasmettere risulta essere "nascondita".

Il tipo della modulazione angolare è quello da rendere più insensibile a processi di modulazione ed interferenza che vanno ad alterare l'ampiezza del segnale, in cui, in questo caso, non c'è informazione. (Esempio)



$$x(t) = 0,2 \cos [20\pi t + 5 \cos(2\pi t)]$$

$$\Delta = 0,2 \text{ V} \quad k_f = 5 \text{ rad/V}$$

$$f_c = 10 \text{ MHz} \quad f_m = 1 \text{ MHz}$$

## Modulazione angolare

L'analisi dei segnali modulati angolarmente è molto più complessa di quella dei segnali modulati in ampiezza. Essa si conduce tradizionalmente ipotizzando un segnale modulante sinusoidale, con le relative espressioni

### Segnale modulante sinusoidale

MI  $\alpha(t) = k_f \cos(2\pi f_m t)$  Der. ist. di fase, proporzionale a un coseno di freq.  $f_m$

PF  $\alpha(t) = \frac{k_f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)$  Incremento della fase nel caso di modulazione di frequenza

PF  $f_d(t) = -f_m k_o \sin(2\pi f_m t)$  Incremento della derivata ist. di frequenza, nel caso della modulazione di fase

PF  $f_d(t) = k_f \cos(2\pi f_m t)$  Der. ist. di frequenza, proporzionale al coseno avendo l'inverso di modulazione di frequenza  $k_f$ .

A parte certa fattori di sporcamento, le condizioni si riconducono tutte alla stessa situazione.

Di nuovo l'analisi porta su un segnale modulato in frequenza; facilmente si può ricondurre questa situazione alla modulazione di fase.



$$X_k = \int_m \int_{-\frac{1}{2T_m}}^{\frac{1}{2T_m}} e^{jx \sin(2\pi f_m t)} e^{-j2\pi k f_m t} dt =$$

$\downarrow$  coeff. di Fourier  
 $\downarrow$  fattore di normalizzazione  $1/T_c$   
 $\rightarrow$  intervalli pari al periodo della funzione  
 Termine che rappresenta l'operazione di traslazione, ovvero calcolo del coefficiente, rispetto alla x.

$$= \frac{1}{2T} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jx \sin(\theta)} e^{-jk(\theta)} d\theta = J_k(x)$$

in cui  $\theta = 2\pi f_m t$  e l'integrale delimitato dalle cosiddette precessioni di Bessel, indicate con  $J_k(x)$ , il cui andamento particolare consente di fare dei ragionamenti sugli andamenti del segnale.

Quindi l'andamento del segnale periodico complesso che rappresenta il segnale modulato angularmente,  $\underline{x}(t)$ , è:

$$\underline{x}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{k_f}{f_m}\right) e^{j2\pi k f_m t}$$

rappresentazione dei seni e dei coseni dello sviluppo in serie di Fourier.

Per le proprietà

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \quad J_k(x) \approx 0 \text{ per } k > x + 1$$

abbiamo

estrazione del termine di indice zero

$$\underline{x}(t) = A J_0\left(\frac{k_f}{f_m}\right) + 2A \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{k_f}{f_m}\right) \cos(2\pi n f_m t) + 2jA \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{k_f}{f_m}\right) \sin(2\pi n f_m t)$$

In pratica si estrae il termine di ordine  $\phi$ ,  
a termini pari e a termini dispari.

L'espressione trovata può essere semplificata, nel  
caso in cui il rapporto  $k_f / f_m$  sia piccolo.

Dunque, se  $\frac{k_f}{f_m}$  è piccolo allora

$$J_0(x) \approx 1$$

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2}$$

$$J_n(x) \approx 0 \quad \text{per } n > 0$$

Quindi, in questo caso, il segnale analitico che  
andiamo a rappresentare è approssimabile dall'espressione:

$$\underline{x}(t) = A + j A \frac{k_f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)$$

cioè la somma di una costante con un termine proporzionale,  
e parte un fattore di fase, alla sinusoide, e quindi al segnale  
modulante.

Il segnale  $x(t)$  è la parte reale di questa espressione:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[ \underline{x}(t) e^{j 2\pi k_f t + \phi_0} \right] =$$

$$= A \cos(2\pi f_c t + \phi_0) - A \frac{k_f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \underbrace{\sin(2\pi f_c t + \phi_0)}_{\text{portante}}$$

Possiamo notare che lo spettro del segnale modulato,  
 $x(t)$ , è molto simile a quello di una modulazione  
BFD-PI, banda laterale doppia e portante unica, con  
opportuna scelta dei parametri.



Quando, in condizioni di basso indice di modulazione convergono la modulazione  
 di ampiezza e la modulazione di frequenza

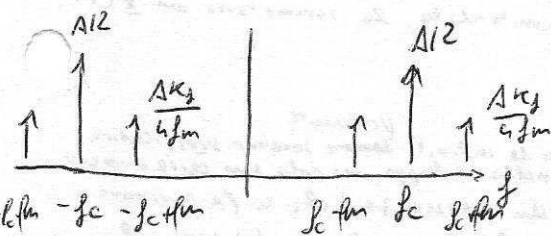
Il segnale in modulazione di frequenza,  $PF$ , è:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_0) - A \frac{k_f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t + \phi_0)$$

Il segnale in modulazione di ampiezza, doppia banda laterale e portante intera,  $BCD-PI$ , è:

$$x(t) = a_p \cos(2\pi f_c t + \phi_0) + k_a \sin(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0)$$

Schematicamente abbiamo questo segnale.



Confrontando questo spettro con quello del segnale modulato di ampiezza, si noterà che sono molto simili, a parte la definizione dei parametri.



## Formula di Carson

$k > x+1$ , poiché le frequenze da Bessel si annullano se  $k > x+1$ ,  
 sv. apprendendo questa espressione si ottiene

$$k > \frac{k_f}{f_m} + 1 \Leftrightarrow k f_m > k_f + f_m$$

e quindi possiamo dire che:

La potenza associata a righe distanti  
 dalla portante più di  $k_f + f_m$  è trascurabile

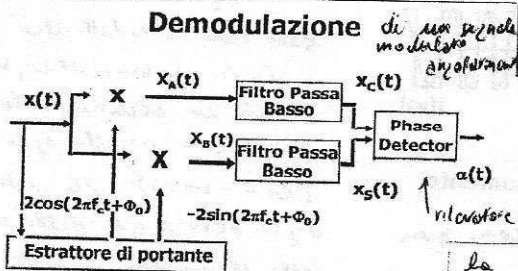
e allora

La banda associata a un segnale  
 modulato sinusoidalmente in  
 frequenza è:

$$B_{MF} = 2(k_f + f_m)$$

somma della deviazione picco-picco  
 della frequenza istantanea e del  
 doppio della frequenza modulante =  $2f_m$

Possiamo dire che l'impedenza di banda ottenuta è sicuramente significativa,  
 in questo facciamo riferimento a un segnale sinusoidale che non agisce



Schema complesso e costoso

inoltre negli stamenti al fine della banda

Lo schema è sempre lo stesso. Dal segnale  $x(t)$  dobbiamo estrarre la portante e filtrare il segnale per il coseno con il rivelatore di fase. E con la portante in quadratura. Far passare gli due filtri passa basso.

Ricordare la componente in fase e la componente in quadratura, così le componenti in banda frequenze, e per fare un riferimento in fase. Lo schema è complessivamente più facile, ma non sta in discussione negli schemi più semplici, in quello che riguarda certe situazioni. Ad esempio in segnali modulati di frequenza in un riferimento direttamente la frequenza istantanea, come mostrato di seguito.

## Discriminatore di frequenza

Ricavare direttamente la frequenza istantanea per segnali MF, modulati di frequenza



Dopo il limitatore duro esce il seno dell'impulso, questo è il limitatore duro.

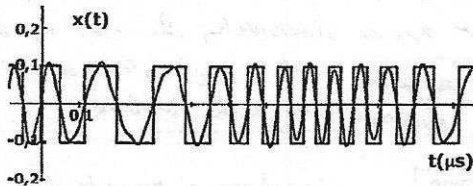
segnale modulante  
 elemento operatore, se siamo in modulazione di frequenza, l'elemento sarà legato all'integrale del segnale modulante

$$x(f) = A(t) \cos\{2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)\}$$

↳ ampiezza che può variare nel tempo

$$x_{HL}(t) = \text{sgn}\{A(t) \cos[2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)]\} = \text{sgn}\{\cos[2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)]\}$$

(A(t) spariva in quanto è un valore positivo e per A)



uscita del limitatore duro impulso

sono stati introdotti dei disturbi di ampiezza, volutamente, visibile in alcune parti, ma ininfluenti rispetto agli zero-cross, la situazione è zero e cioè della individuazione della frequenza.

$x_{HL}(t)$  è periodico nell'argomento del coseno

e periodico è scomponibile come segue:

$$x_{HL}(t) = \text{sgn}\{\cos \vartheta\} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k\vartheta$$

Il segnale  $x_{HL}(t)$  è periodico nell'argomento del coseno, e quindi scomponibile come indicato. ↳ coefficienti dello sviluppo

$$\vartheta = 2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)$$

↳ fase totale del segnale

$$C_0 = 0$$

perché si tratta di un segnale a valore alternato nullo

$$C_1 = 2/\pi$$

Modulazione angolare - 9/10 - Lezione 22

gli altri valori non in interesse conoscere, in quanto il primo addendo è intorno alla frequenza  $f_c$  la portante; gli altri sono tutti intorno alla frequenza  $N \cdot f_c$ , per cui da un filtraggio intorno a  $f_c$  non si fa più emergere.

$$x_{HL}(t) = \frac{2}{\pi} \cos\{2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)\} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \cos\{n(2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t))\}$$

$$z(t) = \frac{2}{\pi} \cos\{2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)\}$$

Questo è l'unico componente da un'elaborazione intorno alla frequenza  $f_c$ . Tale segnale viene derivato e usato è l'uscita del derivatore.

uscita del derivatore

Nella derivata compare il segnale modulante

$$\begin{aligned} \hookrightarrow w(t) &= \frac{2\pi f_c + 2\pi k_f m(t)}{2\pi k_f} \sin\{2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)\} = \\ &= \left\{ \frac{f_c}{k_f} + m(t) \right\} \sin\{2\pi f_c t + \Phi_0 + \alpha(t)\} \end{aligned}$$

$w(t)$  è un segnale modulato di ampiezza BLD-PI ( $f_c \gg k_f m(t)$ ). L'uscita del rivelatore di involucro, una volta eliminata la componente continua, coincide con il segnale modulante

ovvero un demodulatore di involucro.

Bande laterali Doppie - Portante Intera, perché  $f_c \gg k_f m(t)$

Nella espressione di  $w(t)$  si è tenuto conto del fatto che il segnale è modulato in frequenza e quindi, nello sviluppo della derivata, compare l'indice di modulazione in frequenza  $k_f$ ; nello sviluppo compare anche il segnale modulante  $m(t)$

Quindi, per segnali modulati in frequenza, quando questo schema (hard limiter - filtro - derivazione - rivelazione di involucro) è usato direttamente lo demodula istantanea in frequenza e quindi il segnale modulante.

$$x_{n+1}(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t + \phi_c - \theta(t))$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$$

Il segnale ricevuto è  
 $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$   
 Il segnale trasmesso è  
 $x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$   
 Il segnale di riferimento è  
 $x_r(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$

Il segnale ricevuto è  
 $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$   
 Il segnale trasmesso è  
 $x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$

$$w(t) = \frac{\cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t)) \cos(2\pi f_c t + \phi_c)}{\cos(2\pi f_c t + \phi_c)}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta(t)))$$

$w(t)$  è un segnale modulato di ampiezza  
 $0.5(1 + \cos(2\theta(t)))$ . L'ampiezza del  
 rivelatore di frequenza, una volta  
 eliminata la componente continua,  
 coincide con il segnale modulare

Il segnale ricevuto è  $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$

Il segnale ricevuto è  $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$   
 Il segnale trasmesso è  $x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$   
 Il segnale di riferimento è  $x_r(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$   
 Il segnale di riferimento è  $x_r(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$

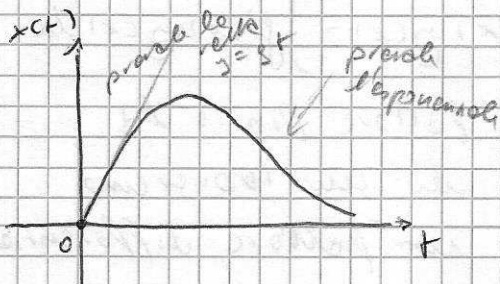
Il segnale ricevuto è  $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c + \theta(t))$   
 Il segnale trasmesso è  $x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$   
 Il segnale di riferimento è  $x_r(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$

Calcolare la Trasformata di Fourier

del segnale  $\rightarrow$  significa calcolare  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$$x(t) = y t e^{-3t} u(t)$$

spettro del segnale



il segnale esiste solo per tempi positivi  $\Rightarrow$  intervallo  $[0, \infty)$

LA FUNZIONE È NULLA NEGLI ALTRI ED È NULLA PER  $t \rightarrow \infty$ ; È LIMITATA PER CUI È VEROSIMILE CHE ESSA SIA INTEGRABILE E QUINDI TRASFORMABILE SECONDO FOURIER

LE CONDIZIONI DI DIRICHLET PRORVEDONO CITE PER  $x(t)$ :

$$y \int_0^{\infty} t e^{-3t} dt = \int_0^{\infty} 3t e^{-3t} d(3t);$$

sostituzione  $3t = y$ , abbiamo

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} dy, \text{ che è la funzione gamma};$$

la soluzione è integrare per parti, per cui  $\rightarrow$  vd. (3)

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

ovvero, per la integrale in bilineari

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx + \text{cost}$$

posto  $g'(x) = e^{-x}$  e  $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ , abbiamo

$$\int_0^{\infty} x e^x dx = x e^x \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot e^x dx$$

OVVERO

POICITÈ

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

allora si sceglie un fattore finito da derivare,  $f(x)$ , da cui troveremo  $f'(x)$ , e si sceglie un fattore differenziale da integrare,  $g'(x)$ , da cui troveremo la primitiva  $g(x)$

Quindi, dato  $\int x e^{-x} dx$ , scelto  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^{-x}$ , abbiamo

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{-e^{-x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g} dx =$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -\underbrace{e^{-\infty}}_0 + \underbrace{e^0}_1 = 1$$



$$③ \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = -y e^{-y} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1$$

Questo verifica la trasformabilità della funzione data.

La trasformata di Fourier si può calcolare direttamente, per mezzo delle formule oppure per mezzo di alcune relazioni alle proprietà della trasformata di Fourier

IN QUESTO CASO POSSIAMO RICORRERE LA PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.

$$\frac{d}{df} X(f) \longleftrightarrow -j2\pi t X(t) \quad \text{da cui}$$

$$t x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{-j2\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

conosciamo la trasf. di  $e^{-3t} u(t)$ , che è una delle trasf. notevoli

$$\begin{aligned}
 & \uparrow \\
 & \text{cost. moltiplicata,} \\
 & \text{per la linearità si ha che esse} \\
 & \text{permangono nel tempo e in freq.} \\
 & \text{per cui otteniamo che la trasformata è} \\
 & \frac{1}{2+j2\pi f} \longleftrightarrow e^{-3t} u(t) \\
 & \frac{1}{-j2\pi} \cdot \frac{d}{df} \frac{1}{3+j2\pi f} \longleftrightarrow t e^{-3t} u(t) \\
 & \frac{1}{(3+j2\pi f)^2} \quad \text{" } \frac{2\pi j}{(3+j2\pi f)^2}
 \end{aligned}$$

$$g \cdot \frac{1}{-j2\pi} \cdot \frac{j2\pi}{(3+j2\pi f)^2} = \frac{g}{(3+j2\pi f)^2}$$

POSSIAMO IN QUALCUNQUE MODO VERIFICARE LA VERIDICITÀ DEL RISULTATO OTTENUTO.

L'AREA DEL SEGNALE È  $\underline{1}$ , e ricordando che l'area della funzione nel tempo vale il valore della trasformata nell'origine, ovvero  $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \Rightarrow X(0) = \text{Area del segnale}$

SI RICORDA LA QUALITÀ DELLA PROPRIETÀ, PER CUI L'AREA DELLA TRASFORMATA VALE IL VALORE DEL SEGNALE NELL'ORIGINE

$$\text{ovvero } x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

Dunque

$$\frac{g}{(3+j2\pi f)^2} \Big|_{f=0} = \underline{1}, \text{ la proprietà risulta verificata}$$

ALTRE POSSIBILITÀ DI VERIFICA PER UN SEGNALE  $x(t)$  DATO NON CHE NE SONO, INFATTI IL SEGNALE NON HA PARTICOLARI SIMMETRIE NEL TEMPO, POTREBBE  $x(t)$  NON ESSERE PARI, NE DISPARI, SU PUÒ PRESENTARE CURE AD ESSA CORRISPONDA UNA

# COMPLESSA

$(3 + j2\pi f)^2$  È IL QUADRATO DI UN NUMERO COMPLESSO; NE DERIVA CHE È UN NUMERO COMPLESSO. CHE HA CHE ~~MODULO~~ QUADRATO IL MODULO AL QUADRATO È CHE FA È IL DOBBO DEGLI PASSI. Dunque

$\frac{y}{(3 + j2\pi f)^2}$	è scomposta come	$\frac{y}{3 + (2\pi f)^2}$ <p style="font-size: small; margin: 0;">                     Il modulo del quadrato                 </p>	$e^{-j2\pi f t}$
		Ampiezza	per il fatto che è un quadrato
			Fase

2)

Calcolare gli spettri di ampiezza e fase del segnale

$$x(t) = [2B \operatorname{sinc}^2(2\pi Bt) + 1] \cos(2\pi Ft + \psi)$$

Il segnale dato è nella forma ↑  
fase

$a(t) \cos(2\pi Ft + \psi)$  e lo presenza del coseno indica una modulazione di ampiezza. Per gli spettri, moltiplicare per un coseno significa definire delle traslazioni di spettro

Applicando le formule di Eulero per il coseno:

$$\frac{a(t)}{2} \cdot [e^{j(2\pi Ft + \psi)} + e^{-j(2\pi Ft + \psi)}], \text{ da cui}$$

$$\frac{a(t)}{2} e^{j\psi} \cdot e^{j2\pi Ft} + \frac{a(t)}{2} e^{-j\psi} \cdot e^{-j2\pi Ft}$$

moltiplicare un segnale per l'esponente che significa spostare lo spettro, centrato in 0, in F.

Quindi in termini di frequenza abbiamo che questo diventa:

$$\frac{A(f-F)}{2} e^{j\varphi} + \frac{A(f+F)}{2} e^{-j\varphi} \quad (f \neq F)$$

e una costante

Abbiamo dunque calcolato la trasformata in riferimento al segnale  $a(t)$ , con

$$a(t) = 2B \sin^2(2\pi Bt) + 1$$

↳ questa è una costante

che deve essere trasformata, ragionando sulla proprietà, piuttosto che calcolare l'integrale

La costante ha come trasformata di Fourier un impulso di Dirac

$$1 \longleftrightarrow \delta(f)$$

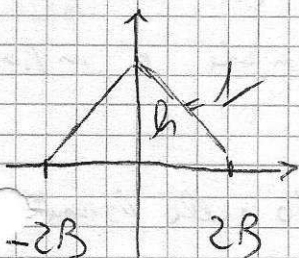
Ricordando che  $\cos x$  è la trasformata di un rettangolo e che  $\frac{\sin x}{x}$  è la trasformata di un triangolo.

Quando dobbiamo determinare il triangolo

quando l'argomento del  $\frac{\sin x}{x}$  è  $\pi \Delta f \cdot t$ , allora

$\Delta f$  è la banda del segnale, quindi la

metà dello spettro delle  $\text{Hz}$



per l'altra, a  $t=0$   $\frac{\sin 0}{0} = 0$ , quindi esistono  $2B$  e l'area  $\cdot t$

Per calcolare l'altezza poniamo

$f=0$ , poiché  $\frac{df}{dt} = 1$ , abbiamo un valore  $zB$ , che è il valore nell'origine del segnale, nel tempo.

In frequenza rappresenta l'area del triangolo.

Quindi il triangolo ha area  $zB$  e base  $4B$ . Poiché  $h$  è l'altezza,

$$\frac{zB \cdot h}{2} = zB = h = 1$$

Area del rettangolo con gli estremi  $h$  e  $z$ .

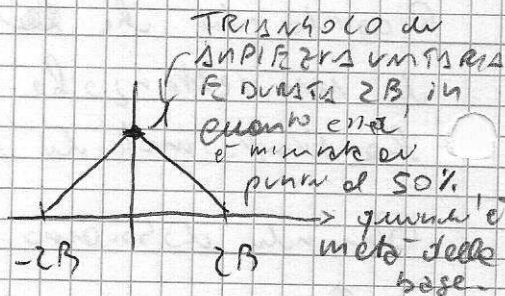
Quindi abbiamo e quindi la

trasformata di Fourier del segnale è, in fine:

$$\Delta(f) = \text{tr}_{zB}(f) + \mathcal{L}(f)$$

↳ questo dovrà essere inserito nello spazio

$f$  che porterà il risultato finale



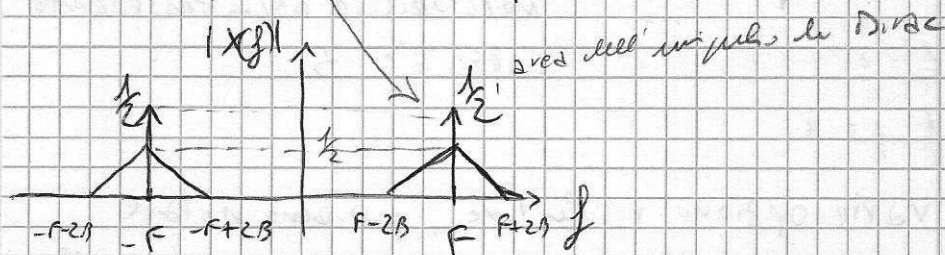
Quindi

$$X(f) = \frac{f(f-F)}{2} e^{j\varphi} + \frac{f(f+F)}{2} e^{-j\varphi} +$$

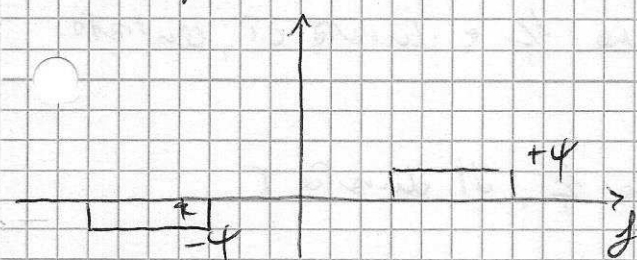
controbuto che viene nella formula definita nella presenza di un impulso di Dirac.

$$+ \frac{1}{2} e^{j\varphi} f_{w_{2B}}(f-F) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} f_{w_{2B}}(f+F)$$

Lo spettro di ampiezza è:



Lo spettro di fase è:



gli addendi  
 $\frac{1}{2} e^{j\varphi} f_{w_{2B}}(f-F)$   
 PER VALORI POSITIVI DI  
 FREQUENZA LA FASE È  
 $+$

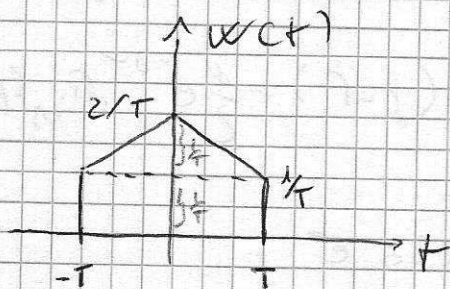
PER VALORI NEGATIVI  
 DI FREQUENZA  
 GLI ADDENDI CON  
 $f+F$ , LA FASE È  $-$

SI NOTI COME GIUSTAMENTE LO SPETTRO DI

FASE SIA UNA FUNZIONE PARI E LO SPETTRO  
 DI AMPIEZZA SIA UNA FUNZIONE DISPARI

3)

Calcolare la Trasformata di Fourier del segnale, essendo il segnale dato  $x(t)$  in figura



IL SEGNALE È REALE E PARI.

LA TRASFORMATA SARÀ REALE E PARI.

È CALCOLABILE L'AREA DEL SEGNALE CHE DOVRÀ ESSERE RELAZIONATA AL VALORE NELL'ORIGINE DELLA TRASFORMATA.

$$A_{\text{rec}} = 2T \cdot \frac{1}{T} = 2$$

$$A_{\text{tri}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot T \cdot \left(\frac{3}{T} - \frac{1}{T}\right) = 1$$

L'AREA È: 3

Tra le varie opzioni risolutive, possiamo notare quella in cui il segnale è decomponibile nella somma di due segnali:

- rettangolo di ampiezza  $\frac{1}{T}$  e durata  $2T$ , centrato nell'origine
- triangolo di ampiezza  $\frac{1}{T}$ , di durata  $T$ .

lunga:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{T} \text{rect}_{2T}(t)}_{\text{Area}} + \underbrace{\frac{1}{T} \text{tri}_T(t)}_{\text{Area}}$$

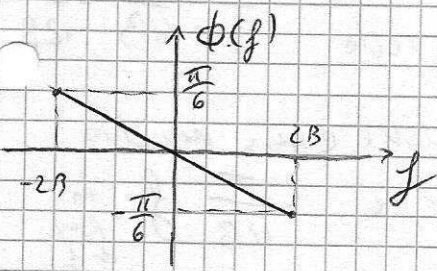
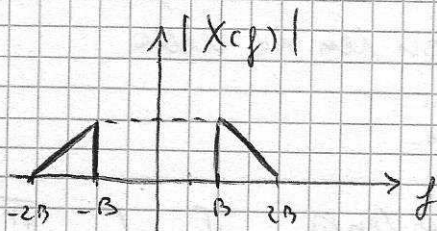
$$X(f) = \underbrace{2}_{\text{Area}} \underbrace{\text{sinc}(2\pi T f)}_{\text{lunga}} + \underbrace{1}_{\text{Area}} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2(\pi f)}_{\text{Area}}$$



4)

anticamento in tempo

Calcolare il segnale avente lo spettro seguente:



Si ricorda la proprietà della Trasformata di Fourier relativa alle traslazioni in tempo:

se  $x(t) \leftrightarrow X(f)$

allora  $x(t-t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

$\Rightarrow \phi(f) = \phi(f) - 2\pi f t_0$

in un computer un aumento di fase lineare e crescente indica la presenza di un ritardo

Il  $-2\pi f t_0$  indica la presenza di un ritardo, quindi nello spettro, se esiste un ritardo, calcolate in quanto si può scrivere, in funzione di  $f$

la retta, considerata  $-2\pi f t_0$ .

Si nota che c'è un salto di  $\pi/3$  in una  
box di  $4B$ , nell'andamento dello spettro  
di fase, quindi la pendenza della  
retta è  $\frac{\pi/3}{4B}$ , ovvero,

$$\left. \begin{array}{l} \text{salto di } \pi/3 \\ \text{box di } 4B \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pendenza dello spettro} \quad \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4B} = \frac{\pi}{12B}$$

Il segno della pendenza deve essere negativo  
perché "scende", quindi è  $-\frac{\pi}{12B} f$  in  
punti  
di f

ponendo

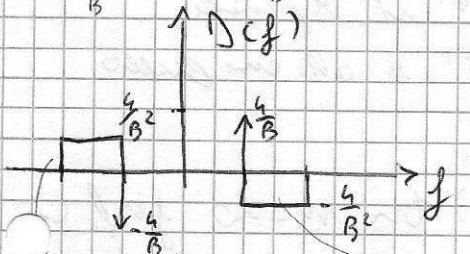
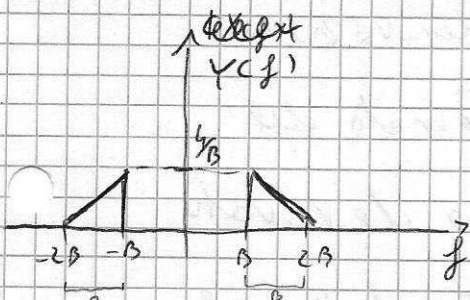
$$-2\pi f t_0 = -\frac{\pi}{12B} f$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{24B} \text{ che è il ritardo}$$

Dunque lo spettro di fase è sereno e  
trovare un ritardo.

Se riusciamo a calcolare lo spettro di ampiezza  
e la sua entità trasformata, allora  
introducendo un ritardo di  $\frac{1}{24B}$  otteniamo  
il segnale pulito.

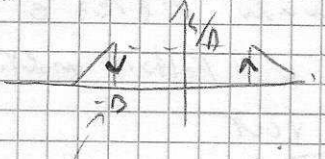
Dobbiamo dunque analizzare lo spettro di  
ampiezza



→ Crescita costante  
 quindi derivata costante  
 pari a  $\frac{1/B}{B} = \frac{1}{B^2}$   
 decrescita costante

La derivata è il valore dell'entità trasformata.

Il passaggio da una  
 equazione di derivata non  
 composta o indifferenziata  
 →  $2\pi$  nell'altro dominio



crescente in  $-B$ , di valore pari al salto  $1/B$ ,  
 crescente in  $B$ , di valore  $\frac{1}{B}$

Partendo dalla conoscenza  
 della trasformata e della  
 entità trasformata dei rettangoli  
 parliamo a quelle dei  
 triangoli.

Per fare questo si fa  
 la derivata dello  
 spettro di ampiezza  $Y(f)$ .

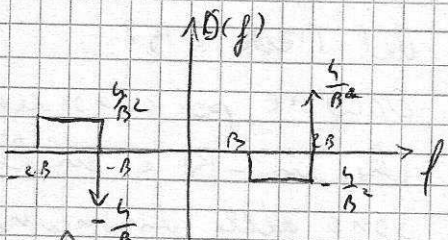
Si considera il fatto che  
 una crescita costante  
 comporta una derivata  
 di valore positivo costante  
 pari al valore dell'impulso  
 ( $1/B$ ) diviso il valore  
 del tratto ( $B$ ).

Occorre poi considerare  
 che in  $-B$  e in  $B$  ci  
 sono delle discontinuità  
 e derivare una discontinuità  
 comporta in genere un  
 impulso di Dirac,

Dunque, grazie alla derivazione  
 troviamo l'antitrasformata del  
 segnale, dello spettro derivato.

Prendiamo per  $-j2\pi ft$  il segnale  
 antitrasformato di  $D(f)$  o altrimenti quello  
 cercato. Ovvero

1. Si è determinato  $D(f)$  in modo giusto
2. Si antitrasforma in  $d(t) = \dots$
3. Quello che cerchiamo è  $y(t) = d(t)$ : giusto
4. Occorre introdurre il ritardo trovato  
 grazie allo spettro di  $P(f)$ .



Abbiamo, per calcolare  $D(f)$ ,  
 due rettangoli di  
 altezza = ampiezza  $\frac{1}{B}$  e  
 una larghezza  $B$ ,  
 quindi l'area è  $4/B$ ,  
 che è il fattore moltiplicativo  
 di vert.

Abbiamo:

$$\frac{1}{B} \text{sinc}(\pi Bt) e^{-j2\pi ft} + \frac{1}{B} \text{sinc}(\pi Bt) \cdot e^{j2\pi ft}$$

l'esponente  
 $e^{j2\pi ft}$ , con  $\phi = -\frac{\pi}{2}$

ovvero

$$\frac{4}{B} \operatorname{sinc}(\pi Bt) \left[ \frac{e^{-j3\pi Bt} - e^{j3\pi Bt}}{-j2\pi t} \right] + \frac{4}{B} \left[ \frac{e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}}{-j2\pi t} \right]$$

che è la ~~trasformata~~ <sup>trasformata</sup> dello <sup>derivata</sup> della somma dei due rettangoli e che è <sup>il</sup> doppio di quello dei due impulsi di Dirac

Per ottenere il risultato puoi derivare quello per  $-j2\pi t$ :

$$\frac{4}{B} \operatorname{sinc}(\pi Bt) \left[ \frac{e^{-j3\pi Bt} - e^{j3\pi Bt}}{-j2\pi t} \right] + \frac{4}{B} \left[ \frac{e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}}{-j2\pi t} \right]$$

Ultimo passaggio ricordando che

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \text{ otteniamo}$$

$$\frac{4}{B} \operatorname{sinc}(\pi Bt) \frac{\sin 3\pi Bt}{\pi t} - \frac{4}{B} \frac{\sin 2\pi Bt}{\pi t}$$

$\frac{\sin 3\pi Bt}{3\pi Bt} = \operatorname{sinc}(3\pi Bt)$        $\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} = \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$

perché  
sviluppo  
mettendo  
fattore il B e  
una costante

Problema delle onde opportunamente i due  
seni, ottenendo due versioni del tipo

$$\frac{\sin x}{x}, \text{ o l'altro seno}$$

$$12 \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \operatorname{sinc}(3\pi Bt) +$$

Tramortata da un  
trapezio

$$- 8 \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$

Trasf del rettangolo

un trapezio  
meno un  
rettangolo



1)

Calcolare l'autocorrelazione del segnale:

$$s(t) = \frac{1}{T} (T+t) \text{rect}_T(t+T/2) e^{-j2\pi\omega t/T}$$

$T$  è la durata dell'impulso

Possiamo interpretare il segnale come

$$s(t) = a(t) \underbrace{e^{-j2\pi\omega t/T}}_{\substack{\text{segnale da una sinusoidale e} \\ \text{frequenza } \frac{\omega}{T}}}$$

Il segnale è limitato da una finestra ~~di~~  
~~di~~ ~~rect~~, che va da  $0$  a  $-T$  scadenza di durata  $T$ ,  
 inizio da  $-T$  a  $0$   
 crescente, pendenza  $1/T$

L'autocorrelazione  $R_{ss}(\tau)$  è definita come

$$R_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot s(t+\tau) dt$$

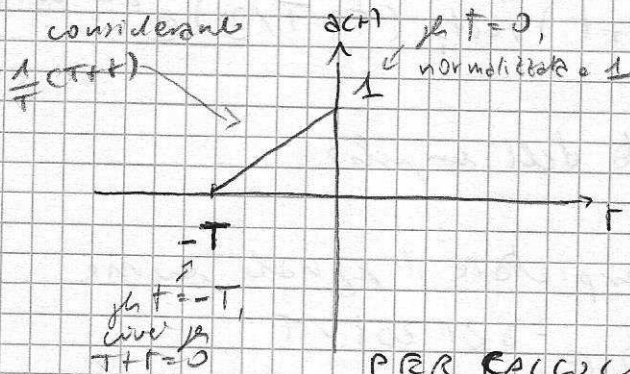
$$R_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot e^{j2\pi\omega t/T} \cdot a(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi\omega(t+\tau)/T} dt =$$

$$= e^{-j2\pi\omega\tau/T} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot a(t+\tau) dt =$$

$$= e^{-j 2\pi \frac{20}{T} \tau} R_{aa}(\tau)$$

in cui  $R_{aa}(\tau)$  è l'auto correlazione del segnale  $a(t)$ .

Il segnale viene da  $-T$  a  $T$



$a(t)$  è il segnale da cui dobbiamo fare l'auto-correlazione.

PER CALCOLARE L'AUTO-CORRELAZIONE:

IL SEGNALE  $a(t)$  È TRASFORMABILE: ha area  $\frac{T}{2}$ , quindi AREA  $A(f)$ .

Si può 1. Calcolare direttamente l'auto-correlazione in tempo oppure 2. si calcola la Trasformata  $A(f)$ , se ne fa il modulo al quadrato, per applicazione del Teorema di Wiener che afferma che l'auto-correlazione è la Trasformata di Fourier del modulo della Trasformata al quadrato - cioè -

$$A(f) \rightarrow |A(f)|^2 \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \Rightarrow \text{auto-correlazione}$$

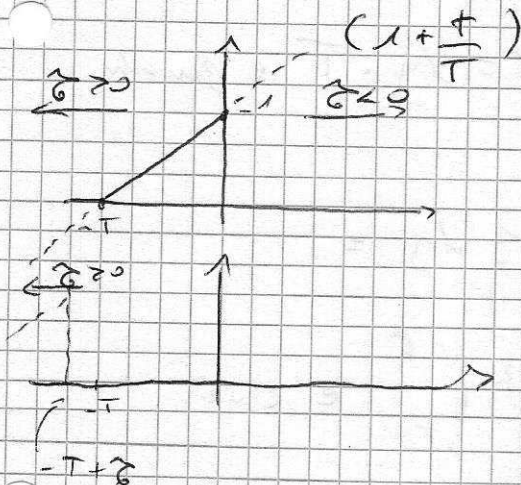
Nel caso di segnali come  $a(t)$  è più semplice operare nella variabile tempo:



Quando si effettua l'autocorrelazione nel tempo ricordando alcune proprietà.

Se il segnale è reale allora l'autocorrelazione è una funzione pari.

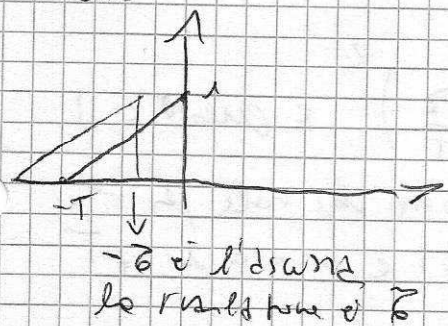
Si può calcolare l'autocorrelazione solo per traslazioni positive o negative, impostando lo zero dell'origine a priori.



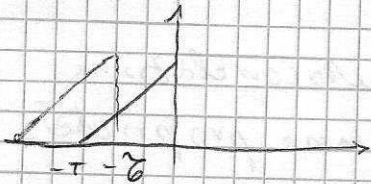
Si può trovare per traslazioni  $\tau > T$ .

per traslazioni  $\tau > T$  l'autocorrelazione è nulla

altra situazione;



L'autocorrelazione è l'intersezione dei prodotti decurtati. Qual è la zona in cui le due funzioni sono contemporaneamente non nulle? Da  $-T$  a  $-T + \tau$



$$\int_{-T}^{-\tau} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{\tau}{T}\right) dt =$$

$\downarrow$   
 (SCT)  
 lo chunk  
 non traslate

$\downarrow$   
 (SCT + \hat{\tau})

$$= \int_{-T}^{-\tau} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 dt + \frac{\tau}{T} \int_{-T}^{-\tau} \left(1 + \frac{t}{T}\right) dt$$

per sostituzione di  $1 + \frac{t}{T} = y$ , diciamo che  
 $dy = \frac{1}{T} dt \Rightarrow dt = dy \cdot T$  e quindi

$$T \int_{-T}^{-\tau} y^2 dy + \tau \int_{-T}^{-\tau} y dy =$$

$$T \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-T}^{-\tau} + \frac{\tau}{2} y^2 \Big|_{-T}^{-\tau} \text{ e cioè}$$

$$\frac{T}{3} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \Big|_{-T}^{-\tau} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 \Big|_{-T}^{-\tau} =$$

$$= \frac{T}{3} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^3 + \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 \text{ e questo è il}$$

valore dell'autocorrelazione che vale per  
 variazioni positive (e sei) e minori di  $+T$

Questa espressione deve essere reale simmetrica e valere anche per traslazioni negative o destra, dello stesso quantum  $|T|$ .

Quindi

$$R_{dd}(\tau) = 0 \quad \text{per} \quad |\tau| > T$$

$$R_{dd}(\tau) = \frac{T}{3} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)^3 + \frac{|\tau|}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)^2 \quad \text{in} \quad |\tau| \leq T$$

in  $\tau = T$  la quantità si annulla, così come doveva essere.

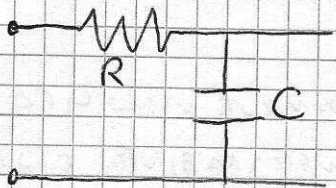
L'AUTOCORRELAZIONE È STATA DUNQUE CALCOLATA PER UN SEGNALE FACILMENTE INFERIBILE, COSÌ UN SEGNALE CHE ABBIAMO COSTANTI OPPURE TRATTI RETTILINEI.

IN QUESTO CASO È CONVENIENTE OPERARE IN TEMPO PIUTTOSTO CHE LAVORARE IN FREQUENZA DOVE SICURAMENTE LA SOLUZIONE È PIÙ COMPLESSA.

2)

Dato un circuito RC passa basso,  
la cui costante di tempo  $\vartheta$  è  
 $0,0001 \text{ s}$ , calcolare il valore dell'uscita  
per  $T = 0,0001 \text{ s}$ , ponendo un ingresso sia  
applicato il segnale

$$s(t) = \frac{t}{\vartheta} e^{-\frac{t}{\vartheta}} u(t)$$

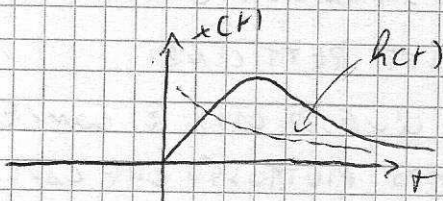


LA COSTANTE DI TEMPO  
DEL CIRCUITO RC

$$RC = \vartheta = 10^{-4} \text{ s}$$

segnale di ingresso

$$x(t) = \frac{t}{\vartheta} e^{-\frac{t}{\vartheta}} u(t)$$



L'OPERAZIONE PER CALCOLARE L'USCITA È  
UNA OPERAZIONE DI CONVOLUZIONE, TRA  
L'INGRESSO E LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA.

La risposta impulsiva per un circuito  
passa basso sarà del tipo  $h(t) = \frac{1}{\vartheta} e^{-t/\vartheta} u(t)$

Operando direttamente con la convoluzione  
significa dire che l'uscita è

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Si può, un'alternativa, andare in  
frequenza calcolando  $X(f)$  e  
calcolando  $H(f)$ ; ne faccio il  
prodotto e di questo ne devo calcolare  
l'antitrasformata

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

La funzione  $H(f)$  è conosciuta ed è

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$$

$X(f)$  ha un polo,

$Y(f)$  ha un zero

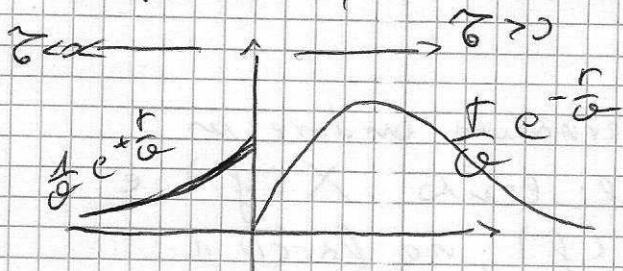
} Completa  
l'antitrasf.

Operare in tempo è lo stesso di fare

La convoluzione ~~consisterà~~ in una  
serie di operazioni di fare una  
moltiplicazione all'altra

Abbiamo  $x(t)$  e  $h(t)$ , possiamo scegliere di ribaltare la risposta

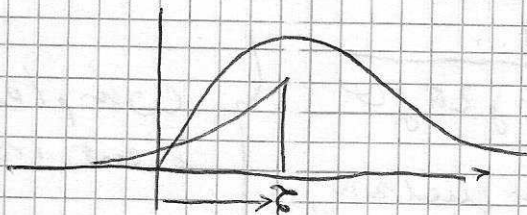
in positiva; le trasformazioni positive sono a dx e quelle negative sono a sx.



Per trasformazioni negative il prodotto sarà sempre nullo,

ovvero  $y(t) = 0$  per  $t < 0$ , il che rispetta il principio di causalità; il circuito non può dare una uscita per tempo anteriore all'ingresso che è applicato.

Per trasformazioni positive abbiamo



In un do abbiamo scrivere l'integrale del prodotto.

$$y(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} \frac{t}{\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} e^{\frac{t-\tilde{t}}{\alpha}} dt =$$

$$= e^{-\frac{\tilde{t}}{\alpha}} \int_0^{\tilde{t}} \frac{t}{\alpha} \frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\tilde{t}}{\alpha}} \left(\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right)^2 \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi otteniamo che

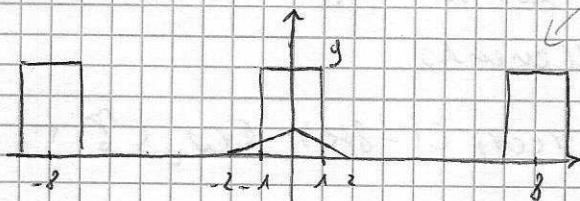
$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} = \frac{1}{2e} \approx \frac{1}{6}$$

3)

Calcolare la convoluzione tra i segnali

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g \operatorname{rect}_2(t - 8k) \quad \text{SEGNALI PERIODICI}$$

$$z(t) = 3 \operatorname{Tri}_2(t)$$



Entrambi i segnali sono simmetrici e pari.

Si può pensare di risaltare il triangolo che già precedentemente rimane così.

Poi dobbiamo traslare di  $kx$  e di  $sx$ , per tempi positivi e tempi negativi.

Scegliendo di ribaltare e traslare

il triangolo, dopo 8 secondi di

traslazione, sia a  $sx$  (tempi negativi), sia a  $dx$  (tempi positivi), si ripete la situazione iniziale.

Quindi la convoluzione è periodica.

Poiché la singola convoluzione ha una durata che è la somma delle durate

allora nel rettangolo la base è lunga 2, nel

Triangolo una base lunga 4, allora la base dell'impulso risultante della convoluzione sarà lunga 6, ma non avremo mai della sovrapposizioni da quelle che sono le repliche periodiche.

Ci si parla <sup>della convoluzione,</sup> un uguale periodo.

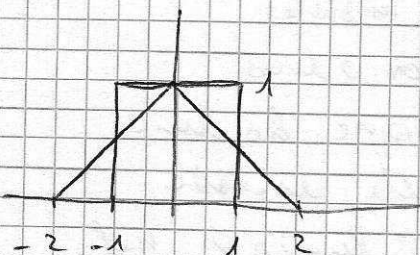
La convoluzione  $y(\tau)$  sarà:

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{g \operatorname{rect}_2(t - 8k)}_{\substack{\text{segnale periodico,} \\ \text{non troncato}}} \cdot \underbrace{3 \operatorname{tri}_2(\tau - t)}_{\text{segnale troncato}} dt$$

Per la linearità si può invertire la sommatoria con l'integrale, ottenendo

$$y(\tau) = 27 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}_2(t - 8k) \cdot \operatorname{tri}_2(\tau - t) dt$$

Quindi, a parte le repliche, si tratta di calcolare la convoluzione tra un impulso rettangolare e un impulso triangolare.



Per calcolare la convoluzione di questi due impulsi si ragiona come sempre: risaltamento e troncatura. I due uguali sono entrambi



pari. Il risultamento può essere scelto per l'uno o per l'altro, indifferentemente.

Se volessi lavorare nel dominio della frequenza abbiamo:

$$2 \operatorname{sinc}(2\pi f) \cdot 2 \operatorname{sinc}^2(2\pi f) =$$

$$\underbrace{\text{Trasformata in F. del rettangolo}}_{= 4 \operatorname{sinc}^3(2\pi f)},$$

perché il risultato è l'entità trasformata di  $4 \operatorname{sinc}^3(2\pi f)$ , da non parte soluzione, perché, visto che i segnali sono sempre si lavora nel tempo.

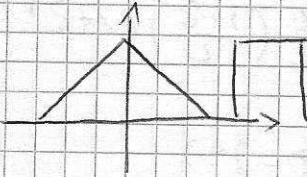
Dato che i segnali sono pari, il risultato delle convulsioni sarà un risultato pari, perché possiamo considerare solo traslazioni positive, cioè verso destra.

Il segnale più facile da tracciare è sempre quello rettangolare, perché se si sa che è reale l'impulso rettangolare.

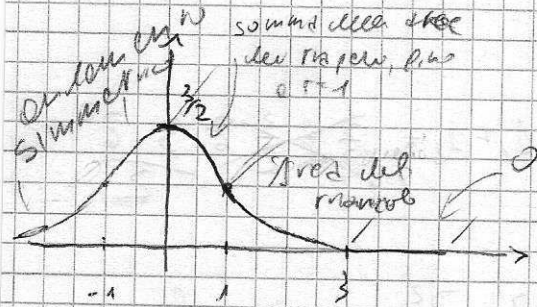




per  $\tau_0 > 3$  la convoluzione è nulla, essendo



La convoluzione ha l'andamento di due archi di parabole



convoluzione  
↓

$$0 \leq t \leq 1 \quad g(t) = \frac{3-t^2}{2}$$

$$1 \leq t \leq 3 \quad g(t) = \frac{1}{4}(3-t)^2$$

$$t \geq 0 \quad g(t) = 0$$

L'andamento è simmetrico poiché la convoluzione è, in questo caso, una funzione pari.

Questo andamento deve essere moltiplicato con il ciclo  $\delta$  per ottenere il risultato finale.